

Les quartiers de la lune de Troie

ou

Le bouclier d'Achille

Essai sur le corps de classe, par

Jacques Boéchat et Maurice Mischler

arXiv:0803.3268v1 [math.NT] 22 Mar 2008

Introduction

La théorie du corps de classe occupe une place privilégiée dans les mathématiques. En effet, cet ensemble de théorèmes est à la base de plusieurs pans de ce qui se fait de plus pointu actuellement en théorie des nombres. Mais notre objectif était plus précis : nous avons, il y a deux ans, rédigé une preuve du théorème de Catalan-Mihăilescu. Et dans cette preuve, nous avons besoin de l'existence du corps de Hilbert d'un corps de nombres et du Théorème de Čebotarev. On voit rapidement qu'il faut pour cela une bonne partie des théorèmes principaux de la théorie du corps de classe global. Nous avons donc fait un séminaire sur le sujet pour comprendre cette théorie.

Le but est donc de prouver de la manière la plus directe ces deux résultats. Plusieurs approches sont possibles : l'approche adélique, l'approche cohomologique et l'approche classique. L'approche classique consisterait à relire dans le texte les oeuvres de Čebotarev et de Takagi. Mais il serait dommage d'oublier ce qui s'est fait par la suite visant à améliorer la compréhension profonde, notamment l'application d'Artin et le quotient de Herbrand. En revanche, les approches adéliques et cohomologiques nous ont paru un peu éloignées du problème initial. Restait donc une ligne un peu médiane utilisant la cohomologie, mais uniquement cyclique et en "snobant" les adèles. Néanmoins, rongé par le remords, et voyant que la théorie vu avec les adèles pouvait se déduire assez facilement de ce que nous avons déjà fait, nous l'avons mis tout de même au Chapitre 13.

Pour pouvoir lire cet exposé avec aisance, il serait préférable d'avoir suivi au moins un cours de théorie élémentaire des nombres. C'est-à-dire connaître la notion de corps de nombres; la théorie de Galois sur ceux-ci, sur les corps finis et sur les corps \mathfrak{p} -adiques; le théorème de Dirichlet sur les unités; le théorème " $n = efr$ " sur les extensions d'idéaux premiers dans une extension galoisienne de corps de nombres; les notions de groupes de décomposition et d'inertie; les normes absolues et relatives d'éléments et d'idéaux ainsi que quelques résultats basiques de l'analyse réelle et complexe. Ces résultats seront tout de même rappelés, simplement pour parler le même langage avec le lecteur.

Nous espérons que le lecteur prendra plaisir à parcourir (ou à étudier) ce texte et que cette théorie cessera d'effrayer les gens, car il est vrai qu'elle est un peu dure pour des novices et trop standard pour des mathématiciens actifs, donc peu de gens prennent la peine de regarder en détail tout cela et c'est bien dommage !

Bien sûr, le point de vue que nous présentons ici est largement inspiré de divers ouvrages ou articles. Notamment [Jan], [La2] et [Neu] mais l'approche est un peu différente, un peu plus directe, plusieurs petites erreurs ont été corrigées (on espère ne pas en avoir ajoutées) et surtout quelques développements du genre "left to the reader" éclaircis et un peu étoffés.

Voyons un peu la structure de notre texte :

Il faut considérer le Chapitre 0 comme une boîte à malice dans laquelle se trouvent les résultats importants sur lesquelles la théorie que nous présenterons sera construite. On peut aussi le considérer comme ce qu'on met dans notre sac à dos avant de partir faire une excursion en montagne : il y a un peu de tout et c'est un peu comprimé car le sac est toujours trop petit !

Le Chapitre 1 est un chapitre d'échauffement sur un résultat technique qui n'est utilisé qu'une fois dans le Chapitre 2. On a hésité de mettre tout cela en appendice, mais personne ne lit les appendices et en plus, il y a tout de même certains raisonnements qui seront revus par la suite.

Dans le Chapitre 2, on démontre de manière analytique ce qu'on appelle la première inégalité du corps de classe. On utilisera un peu d'analyse complexe, mais à un niveau assez basique, il faut essentiellement connaître la notion de fonctions holomorphes et méromorphes. On montre au passage que l'application d'Artin (vue au Chapitre 0) est surjective.

Dans le Chapitre 3, on prouve le Théorème de Čebotarev faible et quelques résultats comme le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques ainsi que des réponses sur le comportement modulo p de polynômes irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$. La fin du chapitre donne de jolis résultats sur les différentes manières de décomposer pour un idéal premier (par exemple, le Théorème de Bauer).

Le Chapitre 4 parle de cohomologie cyclique (depuis le début), du quotient de Herbrand et on donne quelques calculs dans le cas d'extensions cycliques de corps de nombres.

Le Chapitre 5 est difficilement définissable : on calcule essentiellement l'indice $[K^* : N(L^*)K_m^*]$, mais ça ne vous dira pas grand-chose. En revanche, nous faisons une digression permettant de définir l'exponentielle et les logarithmes sur les corps \mathfrak{p} -adiques et une autre digression pour savoir quand un élément est une norme d'une extension finie dans les \mathfrak{p} -adiques.

Pour le Chapitre 6, les calculs faits aux chapitres 4 et 5 permettent, avec l'étude approfondie d'un diagramme du tonnerre, de prouver l'égalité fondamentale du corps de classes pour les extensions cycliques. Cela implique un théorème connu sous le nom de "Théorème de la Norme de Hasse".

Avec le Chapitre 7, nous entrons dans le monde des extensions abéliennes avec la notion de " K -modules admissibles". Cela nous permet de démontrer le grand "Théorème de réciprocité d'Artin". En corollaire, on prouve le Théorème de Čebotarev fort et le fameux "Théorème de Kronecker-Weber".

C'est dans le Chapitre 8, que nous apercevons la lumière : on y définit la notion de sous-groupe de congruence, ce qui nous permet d'énoncer le "Théorème d'existence du corps de classe". Ce résultat, fondamental, nous occupera jusqu'au Chapitre 10. Nous faisons quelques réductions pour pouvoir attaquer le problème dans des cas plus faciles.

Dans le Chapitre 9, nous nous concentrons sur un cas "plus simple" : les extensions de Kummer. Nous calculons un nouvel indice. Et comme interlude, nous prouvons le célèbre théorème de réciprocité quadratique, tout en étant conscient que cette preuve est probablement la plus compliquée de ce résultat classique.

Au Chapitre 10, nous prouvons le théorème d'existence, nous définissons aussi l'application d'Artin dans le cas des extensions galoisiennes non abéliennes. Nous utiliserons cette application au Chapitre 12.

Le Chapitre 11 était initialement consacré à la construction du corps de Hilbert. Pour cela, il faut montrer que "le conducteur est admissible". Pour parvenir à ce résultat, nous définissons le "symbole de norme résiduelle", noté $\theta_{\mathfrak{p}}$. Ce symbole nous permettra en outre de prouver au Chapitre 14 les théorèmes du corps de classe local. Nous prouvons donc en plus un certain nombre de résultats pas directement utiles pour l'admissibilité du conducteur. Enfin, nous pouvons construire le corps de Hilbert.

Tout idéal d'un corps de nombres devient principal dans son corps de Hilbert. Cette propriété remarquable est démontrée dans le Chapitre 12. On sort un peu des chemins arithmétiques pour faire une petite incursion dans la théorie des groupes, pour bien sûr revenir au résultat qui nous intéresse.

Les notions d'idèle et d'adèle ont été introduit pour formuler la théorie du corps de classe pour les extensions infinies. Nous avons donc décidé au Chapitre 13 de "recoller les morceaux" pour des lecteurs voulant peut-être se lancer dans cette voie.

Enfin, voyant qu'il ne fallait plus trop travailler pour obtenir les résultats du corps de classe local (en caractéristique 0), nous avons introduit ce dernier chapitre pour cueillir encore ces résultats, non sans s'être assuré que tout corps local est bien le localisé d'un corps de nombres.

Le premier appendice parle des nombres premiers de la forme $x^2 + ny^2$ ou $x^2 + xy + my^2$ et on y prouve que sous certaines conditions, il y a une infinité de tels nombres premiers. On utilise pour la preuve l'existence du corps de la classe d'un groupe qu'on nomme $H_{\mathcal{O}}$ dans des corps quadratiques.

Le sujet du second appendice est le symbole de Hilbert. Nous en donnons les premières définitions et les premières propriétés.

Enfin, on pourrait nous ajouter qu'il serait judicieux de parler de la version cohomologique des théorèmes du corps de classe introduite par J. Tate. Nous y avons pensé, mais il nous semble que cela alourdirait notre propos. Mais peut-être qu'un jour, nous apporterons un appendice à ce texte quand nous aurons trouvé une manière élégante de présenter cela.

On espère bien sûr que chaque lecteur apprendra quelque chose dans ce texte et qu'il n'hésitera pas à nous signaler des erreurs, des maladresses ou des suggestions d'améliorations. Toute remarque est à envoyer à l'adresse :

maurice.mischler@romandie.com ou maurice.mischler@vd.educanet2.ch

Par souci de ne pas trop charger le fichier informatique, nous avons enlevé un certain nombre d'illustrations non mathématiques. Vous pouvez les voir sur le site

<http://mathmontmus.romandie.com/resource/12252/262704>

Table des matières

Chapitre 0 : Rappels et premiers exemples	1
Chapitre 1 : Un résultat sur $j(x, \mathbb{K})$	19
Chapitre 2 : Séries de Dirichlet et première inégalité du corps de classe	26
Chapitre 3 : Théorème de Čebotarev	39
Chapitre 4 : Cohomologie des groupes cycliques et quotient de Herbrand.....	50
Chapitre 5 : Un calcul d'indice	60
Chapitre 6 : L'égalité fondamentale du corps de classe pour les extensions cycliques et théorème de la norme de Hasse	70
Chapitre 7 : La loi de réciprocité d'Artin	77
Chapitre 8 : Préparation à la formation des classes	85
Chapitre 9 : Quelques résultats sur la théorie des n -extensions de Kummer, et calcul d'un nouvel indice	94
Chapitre 10 : Le théorème principal du corps de classe	103
Chapitre 11 : Symbole de restes normiques, conducteur et corps de classe de Hilbert .	111
Chapitre 12 : Capitulation des idéaux d'un corps nombres dans son corps de Hilbert .	125
Chapitre 13 : Interprétation idélique.....	135
Chapitre 14 : Corps de classe local.....	152
Appendice 1 : Deux mots sur les corps quadratiques et sur des représentations de nombres premiers.....	161
Appendice 2 : Deux mots sur le symbole de Hilbert	166

Glossaire et symboles	169
Index	172
Bibliographie	175

Chapitre 0 :

Rappels et premiers exemples

Le début de ce premier chapitre est une espèce de mise en commun des outils et résultats mathématiques qui sont dits “bien connus”. Le plus simple serait de dire : “on considère connus les résultats de [La1], [Sam], [Mar], [Fr-Tay] et [Nar]”. Mais c’est un peu court et pas très gentil pour le lecteur. La volonté est aussi de se mettre d’accord sur les notations. Le lecteur connaisseur en théorie algébrique des nombres pourra sauter les premières considérations jusqu’au paragraphe intitulé “ K -modules, application d’Artin et compagnie”. Ce n’est qu’à partir de là que nous donnerons toutes les preuves (ou au moins les références).

Généralité sur les corps de nombres et l’algèbre élémentaire

Les ensembles $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} seront supposée connus. Les notions de groupes, anneaux, idéaux, corps, modules, espaces vectoriels, algèbres,... aussi. Si A est un anneau. On note A^* ou $U(A)$ l’ensemble des inversibles de A .

On rappelle la donnée des théorèmes d’isomorphismes. Chaque fois que nous dirons “par les théorèmes d’isomorphismes...” nous nous référerons à ceci :

Théorèmes d’isomorphismes :

- a) Soit G, G' des groupes et $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupe de noyau H . Alors f induit un isomorphisme $f' : G/H \rightarrow \text{im}(f)$ qui factorise f en la suite d’homomorphisme

$$G \xrightarrow{p} G/H \xrightarrow{f'} \text{im}(f) \xrightarrow{i} G',$$

où p et i sont les projections, respectivement les injections canoniques. Plus généralement, si H' est un sous-groupe normal de G' et $H = f^{-1}(H')$, on en déduit un homomorphisme injectif :

$$\overline{f} : G/H \longrightarrow G'/H'$$

qui est un isomorphisme si f est surjectif.

- b) Soient G un groupe, et $H_1 \supset H_2$ des sous-groupes normaux de G (H_2 est alors automatiquement normal dans H_1). Alors on a un isomorphisme

$$(G/H_2)/(H_1/H_2) \simeq G/H_1.$$

- c) Soient H_1, H_2 des sous-groupes d’un groupe G . Supposons que $H_1 \subset \{x \in G \mid xH_2x^{-1} = H_2\}$, $H_1 \cap H_2$ est alors un sous-groupe normal de H_1 et $H_1H_2 = H_2H_1$ est un sous-groupe de G dans lequel H_2 est normal. Alors on a :

$$H_1/(H_1 \cap H_2) \simeq (H_1H_2)/H_2.$$

#

Un *corps de nombres* est un corps de dimension finie vu comme \mathbb{Q} -espace vectoriel. Il sera souvent noté K, L, E, M ou H et cette dimension se note $[K : \mathbb{Q}]$, pour un corps de nombres K (attention, si $G \supset H$ sont des groupes, $[G : H]$ sera $|G/H|$, le contexte permettra de distinguer). Pour simplifier, nous considérerons que tous ces corps sont inclus dans le même corps algébriquement clos, disons \mathbb{C} . On peut montrer que pour tout corps de nombres K , il existe $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $K = \mathbb{Q}(\theta)$. Si $L \subset K \subset \mathbb{Q}$ sont des corps de nombres, alors on a $[L : \mathbb{Q}] = [L : K] \cdot [K : \mathbb{Q}]$ (le même résultat est aussi vrai pour des corps quelconques par exemple des corps finis).

Si K est un corps de nombres, on note souvent O_K l'anneau des éléments de K entiers sur \mathbb{Q} . On suppose connu que O_K est un anneau de *Dedekind*, c'est-à-dire noethérien, intégralement clos (donc intègre) et tout idéal premier non nul de O_K est maximal. On peut montrer que dans ce cas-là, l'ensemble I_K des idéaux fractionnaires de K est un groupe abélien librement engendré par les idéaux premiers de O_K . Remarquons que souvent on dira idéal de K plutôt que de O_K . La graphie est souvent \mathfrak{a} ou \mathfrak{b} pour des idéaux et \mathfrak{p} et \mathfrak{P} pour les idéaux premiers ou les places infinies. Nous reviendrons plus tard sur la notions de places. Les unités de O_K devraient se noter O_K^* ou $U(O_K)$... mais nous les noterons U_K .

Soit $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. On note ζ_m une racine m -ème primitive de l'unité. Le corps $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ est appelé le m -ième *corps cyclotomique*. On sait que $[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$, où φ est l'indicateur d'Euler. Il est bien connu, mais toujours assez délicat à prouver que dans ce cas $O_K = \mathbb{Z}[\zeta_m]$.

Soit L/K une extension de corps de nombres de degré n . Soit \mathfrak{p} un idéal premier de K et \mathfrak{P} un idéal premier de L . On dit que \mathfrak{P} est *au-dessus* de \mathfrak{p} si $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap O_K$, ou ce qui est équivalent, \mathfrak{P} apparaît dans la décomposition de l'idéal $\mathfrak{p}O_L$ et on écrit dans ce cas $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. On peut alors identifier O_K/\mathfrak{p} à un sous-corps de O_L/\mathfrak{P} (ces corps sont d'ailleurs finis). On notera $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = [O_L/\mathfrak{P} : O_K/\mathfrak{p}]$, qu'on appelle le *degré résiduel* de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$. Si on écrit $\mathfrak{p}O_L = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}$ et notant f_i pour $f(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p})$, on a $\sum_{i=1}^r e_i f_i = n$. Le nombre entier e_i , noté $e(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p})$ s'appelle *l'indice de ramification* de $\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}$. On dit que \mathfrak{P} n'est pas ramifié dans L (ou ne se ramifie pas dans L) si $e_i = 1$ pour tout i . On peut montrer que le nombre de \mathfrak{p} qui sont ramifiés est fini. Par exemple, si $K = \mathbb{Q}$ et $L = \mathbb{Q}(\zeta_m)$, et si p est un nombre premier, alors l'idéal (p) ramifie dans L si et seulement si p divise m . Enfin, si $K \subset L \subset E$ sont des corps de nombres, et si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P} \subset \mathbf{P}$ sont des idéaux premiers des K, L, E respectivement, on a $e(\mathbf{P}/\mathfrak{p}) = e(\mathbf{P}/\mathfrak{P}) \cdot e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$; et il en est de même pour les f .

Extensions galoisiennes

Soit L/K une extension algébrique de corps d'indice fini n . On dit qu'elle est *galoisienne* si $|\text{Aut}_K(L)| = [L : K] = n$, où $\text{Aut}_K(L)$ est l'ensemble des K -automorphismes de L . Dans ce cas, $\text{Aut}_K(L)$ se note $\text{Gal}(L/K)$ (le groupe de Galois de L/K). Si L et K sont des corps finis, alors L/K est une extension galoisienne, mieux, elle est cyclique (le groupe de Galois est un groupe cyclique) engendré par *l'automorphisme de Frobenius* $x \mapsto x^q$, où $q = |K|$. Supposons maintenant que L et K soient des corps de nombres. On peut voir que tout $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ agit transitivement sur les idéaux premiers de L qui sont au-dessus d'un idéal \mathfrak{p} de K fixé. Cela implique que si $\mathfrak{p}O_L = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{P}_r^{e_r}$, on a $e_1 = e_2 = \cdots = e_r =: e$ et $f_1 = f_2 = \cdots = f_r =: f$, et ainsi, $e \cdot f \cdot r = n$. Quand nous dirons “la théorie de Galois implique que...”, nous ferons référence à un des résultats suivants :

Théorèmes de Galois

Si K et L sont des corps, on note KL le plus petit corps contenant K et L .

- a) Soit $K \subset L \subset E$ des corps. Supposons que E/K soit une extension galoisienne de groupe G . Alors E/L est galoisienne et $\text{Gal}(E/L) = \{g \in G \mid g|_L = \text{Id}_L\} := H$. De plus L/K est galoisienne si et seulement si H est un sous-groupe normal de G et dans ce cas, $\text{Gal}(L/K) \simeq G/H$. Inversement, si H_1 est un sous-groupe de G , le corps $L_1 := \text{Fix}(H_1) = \{x \in E \mid h(x) = x \ \forall h \in H_1\}$, qu'on appelle le corps fixe par H_1 est tel que $\text{Gal}(E/L_1) = H_1$.
- b) Soit $K \subset L$ et $K \subset E$ deux extensions de corps. On suppose que L/K est galoisienne. Alors EL/L est aussi galoisienne et $\text{Gal}(EL/E) \simeq \text{Gal}(L/L \cap E) \subset \text{Gal}(L/K)$. Cet isomorphisme est donné par la restriction à L . L'application $R : \text{Gal}(EL/E) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ ainsi définie est un homomorphisme injectif.
- c) Soit $K \subset L$ et $K \subset E$ deux extensions galoisiennes de corps telles que $L \cap E = K$. Alors EL/K est une extension galoisienne et $\text{Gal}(EL/K) \simeq \text{Gal}(L/K) \times \text{Gal}(E/K)$. #

Normes

a) La norme absolue

Soit K un corps de nombres et \mathfrak{a} un idéal de K . Alors l'anneau O_K/\mathfrak{a} est fini et son cardinal se note $N(\mathfrak{a})$, la norme absolue de \mathfrak{a} . On peut voir que $N(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{b})$, pour tout idéal \mathfrak{a} et \mathfrak{b} . On prolonge la définition pour tout idéal fractionnaire de K .

b) La norme relative d'un élément

Soit L/K une extension de corps de nombres et $\alpha \in L$. L'application $\mu_\alpha : L \rightarrow L$ définie par $\mu_\alpha(\beta) = \alpha \cdot \beta$ est un endomorphisme K -linéaire de L . On pose $N_{L/K}(\alpha) = \det(\mu_\alpha)$. Il est clair que si $\alpha \in K$, $N_{L/K}(\alpha) = \alpha^n$. On peut voir aussi que $N_{L/K}(\alpha \cdot \beta) = N_{L/K}(\alpha) \cdot N_{L/K}(\beta)$, pour tout $\alpha, \beta \in L$. Si $K \subset L \subset E$ sont des corps de nombres et $\alpha \in E$, on a $N_{E/K}(\alpha) = N_{L/K}(N_{E/L}(\alpha))$. De plus, si $\alpha \in K^*$, on a $N(\alpha \cdot O_K) = |N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|$. Si $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sont les K -morphisms de L dans \mathbb{C} , on a $N_{L/K}(\alpha) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(\alpha)$. En particulier si L/K est galoisienne de groupe G , on a $N_{L/K}(\alpha) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(\alpha)$.

c) La norme relative d'un idéal

Soit L/K une extension de corps de nombres d'indice n . Si \mathfrak{p} et \mathfrak{P} sont des idéaux premiers de K et L respectivement tels que $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$, on pose $N_{L/K}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^{f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p})}$, et on prolonge multiplicativement cette norme à tous les idéaux fractionnaires de L (puisque les idéaux premiers engendrent I_K). On voit immédiatement que si \mathfrak{a} est un idéal fractionnaire de K , on a $N_{L/K}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^n$. De même, pour tout $a \in L$, on $N_{L/K}(a \cdot O_L) = N_{L/K}(a) \cdot O_K$, où $N_{L/K}$ est la norme relative définie précédemment. Enfin, si l'extension L/K est galoisienne de groupe G , et \mathfrak{a} est un idéal fractionnaire de L , alors $N_{L/K}(\mathfrak{a}) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(\mathfrak{a})$.

Ramification et décomposition et automorphisme de Frobenius

Soit L/K une extension de corps de nombres et \mathfrak{p} un idéal premier de K . On dit que \mathfrak{p} se décompose totalement dans L si $e(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{P}|\mathfrak{p}) = 1$ pour tout idéal premier \mathfrak{P} de L tel que $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. On a le résultat

suivant :

Lemme “décomposition-ramification”

- a) Soit L_1/K et L_2/K deux extensions de corps de nombres. Alors l'ensemble des idéaux premiers de K qui se décomposent complètement (resp. qui ne ramifient pas) dans $L_1 L_2$ est l'ensemble de idéaux premiers de K qui se décomposent complètement (resp. qui ne ramifient pas) dans L_1 et dans L_2 .
- b) Soit L/K une extension de corps de nombres et E/K la plus petite extension galoisienne contenant L . Alors l'ensemble des idéaux premiers de K qui se décomposent complètement (resp. qui ne ramifient pas) dans L est l'ensemble de idéaux premiers de K qui se décomposent complètement (resp. qui ne ramifient pas) dans E .

Cf. [Mar, Thm. 31 + Corollary, pp. 107-108]

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres de groupe G , \mathfrak{p} un idéal premier de K et \mathfrak{P} un idéal premier de L tel que $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. On définit le *groupe de décomposition de \mathfrak{P} sur \mathfrak{p}* (ou de \mathfrak{P} sur K),

$$Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = Z(\mathfrak{P}/K) := \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\}.$$

Si $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2|\mathfrak{p}$, alors il existe $\sigma \in G$ tel que $Z(\mathfrak{P}_1/\mathfrak{p}) = \sigma^{-1}Z(\mathfrak{P}_2/\mathfrak{p})\sigma$. Ainsi, si l'extension est abélienne (G est abélien), alors tous les $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ sont égaux si \mathfrak{p} est fixé, et on note alors ce groupe $Z(L/\mathfrak{p})$, ou même $Z(\mathfrak{p})$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, et on l'appelle le *groupe de décomposition de \mathfrak{p} sur L* . Revenons au cas général (G non nécessairement abélien); nous avons vu que $[L : K] = n = e \cdot f \cdot r$. On peut aussi voir que $[G : Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})] = r$ et $|Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})| = e \cdot f$. Si $\sigma \in Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, alors il détermine un $\bar{\sigma} \in \bar{G} := \text{Gal}((O_L/\mathfrak{P})/(O_K/\mathfrak{p}))$, et l'application $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ est un homomorphisme surjectif de G sur \bar{G} . Le noyau de cette application se note $T(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ ou $T(\mathfrak{P}/K)$ et s'appelle le *groupe d'inertie de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$ ou de \mathfrak{P}/K* . On a aussi, comme pour Z , $T(\sigma(\mathfrak{P})/\mathfrak{p}) = \sigma T(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})\sigma^{-1}$ pour tout $\sigma \in G$. On a donc $|T(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})| = e$ et $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})/T(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \simeq \bar{G}$, de cardinal f . On a donc, pour tout $\sigma \in T(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, $\sigma(x) \equiv x \pmod{\mathfrak{P}}$ pour tout $x \in O_L$. Supposons que \mathfrak{p} ne ramifie pas, c'est-à-dire $e = 1$ et donc le groupe d'inertie est trivial et donc l'application $\sigma \mapsto \bar{\sigma}$ est un isomorphisme de $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ sur \bar{G} . Nous avons vu que le groupe de Galois \bar{G} est un groupe cyclique avec un générateur privilégié qui est l'application $\nu \mapsto \nu^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})}$ pour tout $\nu \in O_L/\mathfrak{P}$ et l'unique élément de $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ qui correspond à cet automorphisme s'appelle aussi *l'automorphisme de Frobenius de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$* . On le note $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Il est caractérisé comme l'élément de G qui satisfait :

$$\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})(x) \equiv x^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \pmod{\mathfrak{P}} \quad \text{pour tout } x \in O_L.$$

On a aussi $\text{Frob}(\sigma(\mathfrak{P})/\mathfrak{p}) = \sigma \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \sigma^{-1}$ et donc l'ensemble $\{\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{P}|\mathfrak{p}\}$, qu'on note $\text{Fr}_{L/K}(\mathfrak{p})$ est une classe de conjugaison dans G . Si G est abélien, alors $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ ne dépend que de \mathfrak{p} , on le notera $\text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p})$, et on a

$$\text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p})(x) \equiv x^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \pmod{\mathfrak{p}O_L} \quad \text{pour tout } x \in O_L.$$

De plus, si $K \subset M \subset L$ sont des corps de nombres et $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{P} \subset \mathbf{P}$ sont des idéaux premiers de K , M et L respectivement. Alors $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \text{Frob}(\mathbf{P}/\mathfrak{p})|_M$, s'ils sont définis. De même, $Z(\mathbf{P}/\mathfrak{P}) \subset Z(\mathbf{P}/\mathfrak{p})$ et $T(\mathbf{P}/\mathfrak{P}) \subset T(\mathbf{P}/\mathfrak{p})$.

Enfin, soient $K \subset L$ et $K \subset E$ deux extensions de corps de nombres telles que L/K soit galoisienne. On sait par la théorie de Galois que $\text{Gal}(LE/E)$ peut être vu, via la restriction à L , comme un sous-groupe de $\text{Gal}(L/K)$. Mais, il y a mieux : si \mathfrak{P} est un idéal premier de LE , alors $Z(\mathfrak{P}/E)$ (resp. $T(\mathfrak{P}/E)$) est isomorphe (via la même restriction) à $Z(\mathfrak{P} \cap L/L \cap E)$ (resp. à $T(\mathfrak{P} \cap L/L \cap E)$) et peut être vu comme un sous-groupe de $Z(\mathfrak{P} \cap L/K)$ (resp. de $T(\mathfrak{P} \cap L/K)$).

Places et complétions

Soit K un corps de nombres. Une valeur absolue est une application $|\cdot| : K \rightarrow \mathbb{R}$, satisfaisant les conditions, pour tout $x, y \in K$:

- (1) $|x| \geq 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (2) $|xy| = |x||y|$,
- (3) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Si on remplace la condition (3) par la condition plus forte

- (3)' $|x + y| \leq \max(|x|, |y|)$,

on dit que la valeur absolue est *non archimédienne*, et *archimédienne* sinon.

Deux valeurs absolue $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ sont dites équivalentes s'il existe $c, d \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in K$ on ait $c|x|_1 \leq |x|_2 \leq d|x|_1$. Si deux valeurs absolues sont équivalentes, elles induisent sur K la même topologie. L'ensemble des classes d'équivalences des valeurs absolues de K s'appellent les *places* de K . Si K est un corps de nombres, nous allons donner l'ensemble de ses places.

a) Les places finies (non archimédiennes).

A chaque idéal premier \mathfrak{p} de K , on associe une valuation $v_{\mathfrak{p}}$ définie de la manière suivante : si \mathfrak{a} est un idéal fractionnaire de K , on peut écrire de manière unique $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^r \cdot \mathfrak{a}'$ où \mathfrak{p} ne divise pas \mathfrak{a}' (on note $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{a}'$). Alors on définit $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = r$. Si $x \in K$, on pose $v_{\mathfrak{p}}(x) = v_{\mathfrak{p}}(x \cdot O_K)$. La valeur absolue associée à cette valuation est définie ainsi :

$$|x|_{\mathfrak{p}} = N(\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}, \quad x \in K.$$

On peut montrer que cette valeur absolue est non archimédienne, que si $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$, les valeurs absolues $|\cdot|_{\mathfrak{q}}$ et $|\cdot|_{\mathfrak{p}}$ sont non-équivalentes et que toute valeur absolue non-archimédienne sur K est équivalente à une de celles-ci. On note $\mathbb{P}_0(K)$ l'ensemble des places finies.

b) Les places infinies (archimédiennes).

Supposons que $[K : \mathbb{Q}] = n$. On sait qu'il existe n plongements $\varphi : K \rightarrow \mathbb{C}$ (c'est-à-dire des \mathbb{Q} -homomorphismes (injectifs)). A chacun de ces plongements on associe une valeur absolue :

$$|x|_{\varphi} = |\varphi(x)|$$

où $x \in K$ et $|\cdot|$ est la norme complexe. Si $\varphi(K) \subset \mathbb{R}$, on dit que φ est *réelle*. Si $\varphi(K) \not\subset \mathbb{R}$, on dit que φ est *complexe*. Si φ est complexe, le conjugué complexe $\bar{\varphi}$ de φ et φ définissent la même place. Autrement, ces valeurs absolues sont non-équivalentes. Ainsi, si $n = r + 2s$, où r est le nombre de plongements réels de K et $2s$ est le nombre de plongements complexes, on a en tout $r + s$ places infinies.

Si K est un corps de nombres, on peut montrer qu'il n'y a pas d'autres places. Donc, en résumé, il y a une infinité de places finies (autant que d'idéaux premiers) et un nombre fini de places infinies...

On note $\mathbb{P}_\infty(K)$ (resp $\mathbb{P}_\mathbb{R}(K)$, $\mathbb{P}_\mathbb{C}(K)$) l'ensemble des places infinies (resp. réelles, complexes) de K . Souvent, une place infinie se notera \mathfrak{p} , comme pour les places finies.

L'ensemble de toutes les places se note bien sûr $\mathbb{P}(K)$.

Revenons un instant sur les places finies. Si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, on note $\mathbb{K}_\mathfrak{p}$ le complété topologique (on attribue une limite à chaque suite de Cauchy) relativement à la valeur absolue définie par \mathfrak{p} . C'est un corps dit "local" sur lequel $v_\mathfrak{p}$ et $|\cdot|_\mathfrak{p}$ se prolongent. On définit

$$O_\mathfrak{p} = \{x \in \mathbb{K}_\mathfrak{p} \mid v_\mathfrak{p}(x) \geq 0\} \quad \text{et} \quad \widehat{\mathfrak{p}} = \{x \in \mathbb{K}_\mathfrak{p} \mid v_\mathfrak{p}(x) > 0\}.$$

$O_\mathfrak{p}$ est un anneau local d'idéal maximal $\widehat{\mathfrak{p}}$. Cet idéal est principal, on note souvent π un générateur de $\widehat{\mathfrak{p}}$ qu'on appelle "uniformisante"; et tout idéal de $O_\mathfrak{p}$ est du type $\pi^k \cdot O_\mathfrak{p}$. On considère que $K \subset \mathbb{K}_\mathfrak{p}$ et on note $O_{(\mathfrak{p})} := O_\mathfrak{p} \cap K = \{\frac{\alpha}{\beta} \in K \mid \alpha, \beta \in O_K \text{ et } \beta \notin \mathfrak{p}\}$, le localisé de O_K en \mathfrak{p} . C'est aussi un anneau local et son idéal maximal se note $\widetilde{\mathfrak{p}}$, il est aussi principal et chaque idéal est du type $\pi^k \cdot O_{(\mathfrak{p})}$, pour une uniformisante qu'on notera aussi parfois π (lorsque nous ne devrons pas utiliser les deux). On a $\mathfrak{p} \cdot O_{(\mathfrak{p})} = \widetilde{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{p} \cdot O_\mathfrak{p} = \widetilde{\mathfrak{p}} \cdot O_\mathfrak{p} = \widehat{\mathfrak{p}}$. On a aussi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$:

$$O_K/\mathfrak{p}^k \simeq O_{(\mathfrak{p})}/\widetilde{\mathfrak{p}}^k \simeq O_\mathfrak{p}/\widehat{\mathfrak{p}}^k.$$

Selon l'humeur et le besoin du moment, il aurait aussi été possible de définir $O_\mathfrak{p}$ comme la limite du système projectif $\{O_K/\mathfrak{p}^k, \delta_{k+1,k}\}$, où $\delta_{k+1,k} : O_K/\mathfrak{p}^{k+1} \rightarrow O_K/\mathfrak{p}^k$ est l'homomorphisme canonique $x \pmod{\mathfrak{p}^{k+1}} \mapsto x \pmod{\mathfrak{p}^k}$.

Dans le cas où $K = \mathbb{Q}$, on retrouve bien sûr les nombres p -adiques habituels \mathbb{Q}_p .

Si L/K est une extension galoisienne de corps de nombres, \mathfrak{p} et \mathfrak{P} des idéaux premiers de K et L respectivement tels que $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. Alors $\mathbb{L}_\mathfrak{P}/\mathbb{K}_\mathfrak{p}$ est aussi une extension galoisienne de groupe de Galois canoniquement isomorphe à $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Et donc la norme vaut $N_{\mathbb{L}_\mathfrak{P}/\mathbb{K}_\mathfrak{p}}(x) = \prod_{\sigma \in Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})} \sigma(x)$. Les autres normes se définissent de manière identique.

Si la place \mathfrak{p} est infinie, la situation est plus simple : $\mathbb{K}_\mathfrak{p} = \mathbb{R}$ si la place est réelle et $\mathbb{K}_\mathfrak{p} = \mathbb{C}$ sinon. Nous aurons besoin de considérations plus fines sur les complétions, mais nous regarderons ces choses au moment où nous en aurons besoin !

Quelques théorèmes

Tout d'abord un théorème facile, très souvent utilisé :

Théorème chinois

Soit A un anneau commutatif, \mathfrak{a} et \mathfrak{b} des idéaux de A copremiers (i.e. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$). Alors on a l'isomorphisme :

$$A/(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \simeq A/\mathfrak{a} \times A/\mathfrak{b}.$$

Cf. [Sam, Lemme 1, §1.3, p. 22]

##

Un autre théorème plus compliqué dont il est toujours utile de relire (ou de se souvenir de) la preuve :

Théorème des unités de Dirichlet

Soit K un corps de nombres tel que $[K : \mathbb{Q}] = r + 2s$, où r est le nombre de plongements réels et $2s$, le nombre de plongements complexes. Soit U_K le groupe des éléments inversibles de l'anneau O_K . Alors on a l'isomorphisme :

$$U_K \simeq W \times \mathbb{Z}^{r+s-1},$$

où W est l'ensemble des racines de l'unité que K contient.

Cf. [Sam, Théorème 1, §4.4, p. 72].

#

Un autre grand classique :

Théorème 90 de Hilbert

Soit L/K une extension cyclique de corps d'indice fini. Mettons que $\text{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$. Soit $x \in L$. Alors $N_{L/K}(x) = 1$ si et seulement s'il existe $y \in L^*$ tel que $x = \frac{y}{\sigma(y)}$.

Cf. [La1, Thm. 6.6.1, p. 298].

#

A partir de maintenant les choses sérieuses commencent :

K -modules, application d'Artin et compagnie

Soit K un corps de nombres. Nous allons définir un objet important. Néanmoins la nomenclature n'est pas vraiment uniforme dans la littérature : Janusz les nomme *Modulus*, Lang les nomme *Cycle*, Neukirch, *Modul*, Koch, *Erklärungsmodul*, Washington, *Divisors* Lorenz *Modul*... il a bien fallu choisir. La notion de module existe déjà, mais le nom nous a paru assez bon tout de même, après d'âpres discussions, nous nous sommes mis d'accord avec K -module (vous n'allez tout de même pas confondre avec la notion de K -espace vectoriel...).

Définitions (0.1)

Soit K un corps de nombres. Un K -module est une application

$$\mathfrak{m} : \mathbb{P}(K) \rightarrow \mathbb{N}$$

avec les propriétés suivantes :

- a) $\mathfrak{m}(\mathfrak{p}) = 0$ sauf pour un nombre fini de \mathfrak{p} ,
- b) $\mathfrak{m}(\mathfrak{p}) = 0$ si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(K)$,
- c) $\mathfrak{m}(\mathfrak{p}) = 0$ ou 1 si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(K)$.

L'usage est d'écrire \mathfrak{m} comme le produit formel

$$\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})} = \mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}_{\infty},$$

où \mathfrak{m}_0 est identifié à un idéal (l'idéal $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}$), et \mathfrak{m}_{∞} un sous-ensemble de $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}(K)$ (c'est l'ensemble $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(K) \mid \mathfrak{m}(\mathfrak{p}) = 1\}$).

Si \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' sont des K -modules, on définit $\text{pgcd}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}')$ comme suit :

$$\text{pgcd}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}') = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \mathfrak{p}^{\min(\mathfrak{m}(\mathfrak{p}), \mathfrak{m}'(\mathfrak{p}))} = \text{pgcd}(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0) \cdot (\mathfrak{m}_\infty \cap \mathfrak{m}'_\infty).$$

On définit $\text{ppcm}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}')$ de la même manière en remplaçant \min par \max et \cap par \cup . Si $\text{pgcd}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}') = O_K \cdot \emptyset =: \mathbf{1}$, on dit que \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' sont *premiers entre eux*. Enfin, on définit $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}' := (\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}'_0) \cdot (\mathfrak{m}_\infty \cup \mathfrak{m}'_\infty)$. On vérifie facilement que

$$\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{m}' = \text{pgcd}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}') \cdot \text{ppcm}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}').$$

Posons maintenant $S_0(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{m}(\mathfrak{p}) > 0\}$, $S_\infty(\mathfrak{m}) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_\infty(K) \mid \mathfrak{m}(\mathfrak{p}) > 0\}$ et $S(\mathfrak{m}) = S_0(\mathfrak{m}) \cup S_\infty(\mathfrak{m})$. Si $\mathfrak{p} \in S(\mathfrak{m})$, on écrit $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$, et on écrit $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$ dans le cas contraire.

Si \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' sont des K -modules, on dit que $\mathfrak{m} \mid \mathfrak{m}'$ si $\mathfrak{m}(\mathfrak{p}) \leq \mathfrak{m}'(\mathfrak{p})$, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$. Dans ce cas-là, il existe un K -module \mathfrak{n} tel que $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{m}'$; ce \mathfrak{n} n'est pas unique (à cause des places infinies), mais ce n'est pas grave ! on peut prendre par exemple celui dont les places infinies sont disjointes avec celles de \mathfrak{m} .

Soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$ et $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. On pose

$$K_{\mathfrak{p}^n}^* = \{\alpha \in K^* \mid v_{\mathfrak{p}}(\alpha - 1) \geq n\}.$$

Soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(K)$. Supposons que le plongement associé à \mathfrak{p} soit $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}$; on pose

$$K_{\mathfrak{p}}^* = \{\alpha \in K^* \mid \sigma(\alpha) > 0\}.$$

Et enfin, si \mathfrak{m} est un K -module, on posera

$$K_{\mathfrak{m}}^* = \bigcap_{\mathfrak{p} \in S(\mathfrak{m})} K_{\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}}^*.$$

Soit maintenant $x, y \in K^*$, on écrira

$$x \equiv y \pmod{* \mathfrak{m}} \iff x \cdot y^{-1} \in K_{\mathfrak{m}}^* \iff x \equiv y \pmod{* \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}} \forall \mathfrak{p} \in S(\mathfrak{m}).$$

Cela permet d'écrire

$$K_{\mathfrak{m}}^* = \{x \in K^* \mid x \equiv 1 \pmod{* \mathfrak{m}}\}.$$

Cette relation d'équivalence est cruciale dans tout ce qui va suivre. C'est une relations d'équivalence "multiplicative", c'est-à-dire $x \equiv y \pmod{* \mathfrak{m}}$ implique que $x \cdot z \equiv y \cdot z \pmod{* \mathfrak{m}}$, pour tout $z \in K$, mais pas que $x + z \equiv y + z \pmod{* \mathfrak{m}}$ (par exemple, si $K = \mathbb{Q}$ et $\mathfrak{m} = 5 \cdot \emptyset$, on a $\frac{1}{3} \equiv 7 \pmod{* \mathfrak{m}}$, mais $\frac{1}{3} + 3 \not\equiv 7 + 3 \pmod{* \mathfrak{m}}$). Si \mathfrak{m} est réduit à une seule place, nous noterons \mathfrak{p}^n pour \mathfrak{m} , en oubliant les éventuels \emptyset ou O_K qui ne feraient qu'alourdir la notation.

Remarquons que $v_{\mathfrak{p}}(x - 1) \geq n$ veut dire que $x \in 1 + \mathfrak{p}^n \cdot O_{(\mathfrak{p})} = 1 + \tilde{\mathfrak{p}}^n$ où, rappelons-le, $O_{(\mathfrak{p})}$ est le localisé de O_K en \mathfrak{p} . Cela veut aussi dire que $x = \frac{a}{b}$ avec $(a, \mathfrak{p}) = (b, \mathfrak{p}) = 1$ (i.e. $v_{\mathfrak{p}}(a) = v_{\mathfrak{p}}(b) = 0$) et $a \equiv b \pmod{\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}}$.

Remarquons encore que si $x, y \in K^*$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, et $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, alors

$$\begin{aligned} x \equiv y \pmod{* \mathfrak{p}^n} &\iff \frac{x - y}{y} \in \tilde{\mathfrak{p}}^n \iff x - y \in y \cdot \tilde{\mathfrak{p}}^n = \tilde{\mathfrak{p}}^{n+v_{\mathfrak{p}}(y)} \\ &\iff v_{\mathfrak{p}}(x - y) \geq n + v_{\mathfrak{p}}(y) \iff x \equiv y \pmod{\mathfrak{p}^{n+v_{\mathfrak{p}}(y)}}, \end{aligned} \tag{*}$$

La dernière équivalence n'étant bien sûr vraie que si $x, y \in O_K$. De plus, si $x \equiv y \pmod{\mathfrak{p}^n}$, alors il est évident que $v_{\mathfrak{p}}(x) = v_{\mathfrak{p}}(y)$.

Si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(K)$, dire que $x \equiv y \pmod{\mathfrak{p}}$ veut simplement dire que $\sigma(x)$ et $\sigma(y)$ ont le même signe, si σ est le plongement attaché à \mathfrak{p} .

Soit \mathfrak{m} un K -module et $x \in K$. Nous dirons que x est un \mathfrak{m} -entier si $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in S_0(\mathfrak{m})$. L'ensemble des \mathfrak{m} -entiers se note $O_{(\mathfrak{m})}$ et on vérifie que

$$O_{(\mathfrak{m})} = \bigcap_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} O_{(\mathfrak{p})},$$

est un anneau commutatif.

Lemme (0.2)

Soit K un corps de nombres, $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, $u \in O_{(\mathfrak{p})}$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Alors il existe $a \in O_K$ tel que $a \equiv u \pmod{\mathfrak{p}^n}$.

Preuve

Puisque $u \in O_{(\mathfrak{p})}$, on a $u = \frac{\alpha}{\beta}$, avec $\alpha \in O_K$ et $\beta \in O_K \setminus \mathfrak{p}$. Puisque \mathfrak{p} est un idéal maximal de O_K , on a $\beta O_K + \mathfrak{p} = O_K$. On montre alors facilement par récurrence que $\beta O_K + \mathfrak{p}^n = O_K$. Il existe donc $\beta' \in O_K$ tel que $\beta \cdot \beta' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^n}$. En posant $a = \alpha \cdot \beta'$, on vérifie que $\frac{a-u}{u} = \beta \cdot \beta' - 1 \in \mathfrak{p}^n \subset \tilde{\mathfrak{p}}^n$. ~~///~~

Vient maintenant un théorème qui va souvent être utilisé. Il est un peu moins fort que le théorème d'approximation faible, voilà pourquoi nous l'avons appelé le

Théorème (0.3) (Théorème d'approximation débile)

Soit K un corps de nombres, \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' des K -modules, et $y, z \in K$. Alors

$$\text{il existe } x \in K \text{ satisfaisant } \begin{cases} x \equiv y \pmod{\mathfrak{m}} \\ x \equiv z \pmod{\mathfrak{m}'} \end{cases} \iff y \equiv z \pmod{\text{pgcd}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}')}.$$

Preuve

“ \Rightarrow ” : par hypothèse, $xy^{-1} \in K_{\mathfrak{m}}^*$ et $zx^{-1} \in K_{\mathfrak{m}'}^*$. Ainsi, $y^{-1}z \in K_{\mathfrak{m}}^* \cdot K_{\mathfrak{m}'}^* \subset K_{\text{pgcd}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}')}^*$. Cette dernière inclusion est une vérification facile : soient $\alpha \in K_{\mathfrak{m}}^*$, $\beta \in K_{\mathfrak{m}'}^*$ et $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0$. Si $\min(\mathfrak{m}(\mathfrak{p}), \mathfrak{m}'(\mathfrak{p})) = 0$, il n'y a rien à vérifier, supposons donc que $\min(\mathfrak{m}(\mathfrak{p}), \mathfrak{m}'(\mathfrak{p})) > 0$. On a, par hypothèse $\alpha - 1 \in \tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})} \subset \tilde{\mathfrak{p}}^{\min(\mathfrak{m}(\mathfrak{p}), \mathfrak{m}'(\mathfrak{p}))}$. On a la même chose pour $\beta - 1$. On a donc

$$\tilde{\mathfrak{p}}^{\min(\mathfrak{m}(\mathfrak{p}), \mathfrak{m}'(\mathfrak{p}))} \ni (\alpha - 1)(\beta - 1) = \alpha\beta - 1 + \underbrace{(1 - \alpha) + (1 - \beta)}_{\in \tilde{\mathfrak{p}}^{\min(\mathfrak{m}(\mathfrak{p}), \mathfrak{m}'(\mathfrak{p}))}}.$$

On a donc $\alpha\beta \in K_{\tilde{\mathfrak{p}}^{\min(\mathfrak{m}(\mathfrak{p}), \mathfrak{m}'(\mathfrak{p}))}}^*$. Et pour les places infinies, c'est encore plus facile : si $\mathfrak{p} \in \mathfrak{m}_{\infty} \cap \mathfrak{m}'_{\infty}$, on se souvient que dire que $x \equiv y \pmod{\mathfrak{p}}$ veut simplement dire que $\sigma(x)$ et $\sigma(y)$ ont le même signe, où σ est le plongement associé à \mathfrak{p} ; donc, on a $y \equiv z \pmod{\mathfrak{p}}$.

“ \Leftarrow ” : pour les places finies, c'est le théorème chinois ! voilà comment on pourrait résumer cette partie. Le lecteur peut très bien faire cela en exercice. Mais ce n'est pas le genre de la maison que de laisser les parties un peu “laborieuses”.

Supposons donc que $\mathbf{m}_0 = \prod_{i=1}^r \mathbf{p}_i^{\mathbf{m}(\mathbf{p}_i)} \cdot \prod_{j=1}^s \mathbf{q}_j^{\mathbf{m}(\mathbf{q}_j)}$ et que $\mathbf{m}'_0 = \prod_{i=1}^r \mathbf{p}_i^{\mathbf{m}'(\mathbf{p}_i)} \cdot \prod_{k=1}^{s'} \mathbf{r}_k^{\mathbf{m}'(\mathbf{r}_k)}$. Sachant que $y \equiv z \pmod{\mathbf{p}_i^{t_i}}$, où $t_i = \min(\mathbf{m}(\mathbf{p}_i), \mathbf{m}'(\mathbf{p}_i))$, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha \equiv y \pmod{\mathbf{p}_i^{\mathbf{m}(\mathbf{p}_i)}} & i = 1, \dots, r_1 \\ \alpha \equiv z \pmod{\mathbf{p}_i^{\mathbf{m}'(\mathbf{p}_i)}} & i = r_1 + 1, \dots, r \\ \alpha \equiv y \pmod{\mathbf{q}_j^{\mathbf{m}(\mathbf{q}_j)}} & j = 1, \dots, s \\ \alpha \equiv z \pmod{\mathbf{r}_k^{\mathbf{m}'(\mathbf{r}_k)}} & k = 1, \dots, s'. \end{cases} \quad (+)$$

En ayant supposé que $r = r_1 + r_2$ et que $\mathbf{m}(\mathbf{p}_i) \geq \mathbf{m}'(\mathbf{p}_i)$ si $i = 1, \dots, r_1$ et que $\mathbf{m}'(\mathbf{p}_i) > \mathbf{m}(\mathbf{p}_i)$ si $i = r_1 + 1, \dots, r$.

On se souvient que chaque anneau $O_{(\mathbf{p}_i)}$, $O_{(\mathbf{q}_j)}$ ou $O_{(\mathbf{r}_k)}$ possède une uniformisante qu'on notera $\pi_{\mathbf{p}_i}$, $\pi_{\mathbf{q}_j}$ ou $\pi_{\mathbf{r}_k}$. Considérons l'élément

$$\lambda = \prod_{i=1}^{r_1} \pi_{\mathbf{p}_i}^{v_{\mathbf{p}_i}(y)} \cdot \prod_{i=r_1+1}^r \pi_{\mathbf{p}_i}^{v_{\mathbf{p}_i}(z)} \cdot \prod_{j=1}^s \pi_{\mathbf{q}_j}^{v_{\mathbf{q}_j}(y)} \cdot \prod_{k=1}^{s'} \pi_{\mathbf{r}_k}^{v_{\mathbf{r}_k}(z)}.$$

Divisons chaque terme de chaque équivalence du système (+) par λ . On a maintenant que $\frac{y}{\lambda} \in O_{(\mathbf{p}_i)}^*, O_{(\mathbf{q}_j)}^*$ pour $i = 1, \dots, r_1$ et $j = 1, \dots, s$; de même, $\frac{z}{\lambda} \in O_{(\mathbf{p}_i)}^*, O_{(\mathbf{r}_k)}^*$ pour $i = r_1 + 1, \dots, r$ et $k = 1, \dots, s'$. En vertu du lemme précédent, de la remarque (*) précédent le Lemme (0.2) et du théorème chinois, il existe $a_i, b_j, c_k \in O_K$ et surtout $v \in O_K$ satisfaisant le système

$$\begin{cases} v \equiv \frac{y}{\lambda} \equiv a_i \pmod{\mathbf{p}_i^{\mathbf{m}(\mathbf{p}_i)}} & i = 1, \dots, r_1 \\ v \equiv \frac{z}{\lambda} \equiv a_i \pmod{\mathbf{p}_i^{\mathbf{m}'(\mathbf{p}_i)}} & i = r_1 + 1, \dots, r \\ v \equiv \frac{y}{\lambda} \equiv b_j \pmod{\mathbf{q}_j^{\mathbf{m}(\mathbf{q}_j)}} & j = 1, \dots, s \\ v \equiv \frac{z}{\lambda} \equiv c_k \pmod{\mathbf{r}_k^{\mathbf{m}'(\mathbf{r}_k)}} & k = 1, \dots, s' \end{cases}$$

Ainsi, en posant $\alpha = v \cdot \lambda$, on résout le système (+). Donc, la partie “places finie” est résolue.

Pour les places infinies, il suffit de voir la chose suivante : soient $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ les plongements infinis réels de K et $i \in \{1, \dots, r\}$. Alors il existe α_i tel que $\sigma_j(\alpha_i) > 0$ pour $j \neq i$ et $\sigma_i(\alpha_i) < 0$. En effet, si on doit trouver un β tel que $\sigma_i(\beta)$ doit avoir un signe prescrit, on pose $\varepsilon_i = 0$ si $\sigma_i(\beta)$ doit être positif et $\varepsilon_i = 1$ si $\sigma_i(\beta)$ doit être négatif; le nombre

$$\beta = \alpha_1^{\varepsilon_1} \cdots \alpha_r^{\varepsilon_r}$$

répond à la question. Trouvons donc ces α_i . Nous savons que $K = \mathbb{Q}(\theta)$, pour $\theta \in \mathbb{C}$. On suppose sans limiter la généralité que $\sigma_1(\theta) < \sigma_2(\theta) < \dots < \sigma_r(\theta)$. Choisissons $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{Q}$ tels que

$$a_0 < \sigma_1(\theta) < a_1 < \sigma_2(\theta) < \dots < a_{r-1} < \sigma_r(\theta) < a_r.$$

On vérifie facilement que

$$\alpha_i = \frac{\theta - a_{i-1}}{\theta - a_i}$$

possède les propriétés requises.

Maintenant, il s'agit de recoller les morceaux : supposons qu' α est une solution pour la partie finie et β est une solution pour la partie infinie, posons en outre $M = \mathbb{N}(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \cdot \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_s \cdot \mathfrak{r}_1 \cdots \mathfrak{r}_{s'})$. Alors le nombre

$$x = \alpha + M^N \cdot \beta$$

avec N suffisamment grand pour que $\text{sgn}(\sigma_i(x)) = \text{sgn}(\sigma_i(\beta))$ pour tous les i nécessaires et pour que les $v_{\mathfrak{p}_i}(\frac{M^N \beta}{\alpha})$, $v_{\mathfrak{q}_j}(\frac{M^N \beta}{\alpha})$, $v_{\mathfrak{r}_k}(\frac{M^N \beta}{\alpha})$ soient suffisamment grand pour que $x \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}^{\max(\mathfrak{m}(\mathfrak{p}), \mathfrak{m}'(\mathfrak{p}))}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in S(\text{ppcm}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}')) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r, \mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s, \mathfrak{r}_1, \dots, \mathfrak{r}_{s'}\}$. #

Voici maintenant un corollaire que nous utiliserons souvent :

Corollaire (0.4)

Soient \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' des K -modules premiers entre eux. Alors on a l'isomorphisme

$$K^*/K_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}'}^* \simeq K^*/K_{\mathfrak{m}}^* \times K^*/K_{\mathfrak{m}'}^*.$$

Preuve

L'homomorphisme :

$$\begin{aligned} K^* &\longrightarrow K^*/K_{\mathfrak{m}}^* \times K^*/K_{\mathfrak{n}}^* \\ \alpha &\longmapsto (\alpha K_{\mathfrak{m}}^*, \alpha K_{\mathfrak{n}}^*) \end{aligned}$$

est surjectif. En effet, soit $(\beta, \gamma) \in K^* \times K^*$. Par le théorème d'approximation débile, il existe $\alpha \in K^*$ tel que $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{m}}$ et $\alpha \equiv \gamma \pmod{\mathfrak{m}'}$ et donc $\alpha K_{\mathfrak{m}}^* = \beta K_{\mathfrak{m}}^*$ et $\alpha K_{\mathfrak{n}}^* = \gamma K_{\mathfrak{n}}^*$ ce qui prouve la surjectivité. Le noyau de cet homomorphisme est $K_{\mathfrak{m}}^* \cap K_{\mathfrak{n}}^* = K_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}^*$ (cela suit directement des définitions). On a donc un isomorphisme $K^*/K_{\mathfrak{m}\mathfrak{n}}^* \simeq K^*/K_{\mathfrak{m}}^* \times K^*/K_{\mathfrak{n}}^*$. #

Définitions (0.5)

Soit K un corps de nombres. On rappelle que I_K est le groupe des idéaux fractionnaires. Soit S un ensemble fini de places finies de K . On note

$$I_K^S = \{\mathfrak{a} \in I_K \mid v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0 \text{ pour tout } \mathfrak{p} \in S\}.$$

Si \mathfrak{m} est un K -module, on note $I_K^{S_0(\mathfrak{m})} = I_K(\mathfrak{m})$, et même parfois, on note $I_K(\mathfrak{m}) = I(\mathfrak{m})$, quand il n'y a pas d'ambiguïté.

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres et S un ensemble fini de places finies de K contenant toutes celles qui ramifient dans L . On définit l'application d'Artin

$$\Phi_{L/K} = \Phi_{L/K}^S : I_K^S \rightarrow \text{Gal}(L/K)$$

comme suit : si $\mathfrak{p} \notin S$ est un idéal premier, $\Phi_{L/K}(\mathfrak{p}) = \text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p})$; où $\text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p})$ est l'homomorphisme de Frobenius défini plus haut; et on prolonge $\Phi_{L/K}$ en un homomorphisme de groupe sur I_K^S tout entier, car les idéaux premiers qui ne sont pas dans S engendrent I_K^S . Si \mathfrak{m} est un K -module, l'application d'Artin $\Phi_{L/K}^{S_0(\mathfrak{m})}$ se note $\Phi_{L/K}^{\mathfrak{m}}$ (ou même $\Phi_{L/K}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté). Disons sans ambages que nous montrerons que cette application est surjective (Théorème (2.16)) et il sera beaucoup question du noyau

de cette application dans le reste de ce texte. Remarquons un petit résultat trivial sur ce noyau : si \mathfrak{p} est un idéal **premier** dans l'ensemble de définition de $\Phi_{L/K}$, alors on a

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in \ker(\Phi_{L/K}) &\iff Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \{\text{Id}_L\} \forall \mathfrak{P}|\mathfrak{p} \\ &\iff f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1 \forall \mathfrak{P}|\mathfrak{p} \\ &\iff \mathfrak{p} \text{ se décompose totalement dans } L \\ &\iff N_{L/K}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p} \forall \mathfrak{P}|\mathfrak{p}. \end{aligned}$$

Mais n'allez surtout pas croire que ce noyau n'est fait que d'idéaux qui sont des normes d'idéaux de L , mais nous allons voir tout bientôt qu'on peut rapidement trouver une inclusion (cf. Corollaire (0.7)).

Supposons maintenant que L/K est une extension quelconque de corps de nombres. On note $\tilde{S} = \tilde{S}_L = \{\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L) \mid \exists \mathfrak{p} \in S, \mathfrak{P}|\mathfrak{p}\}$. Si \mathfrak{m} est un K -module, on note

$$\tilde{\mathfrak{m}} = \tilde{\mathfrak{m}}_L = \underbrace{(\mathfrak{m}_0 \cdot O_L)}_{=\tilde{\mathfrak{m}}_0} \cdot \underbrace{\prod_{\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_\infty(L), \mathfrak{P}|_K \in \mathfrak{m}_\infty} \mathfrak{P}}_{=\tilde{\mathfrak{m}}_\infty}.$$

On dit que $\tilde{\mathfrak{m}}$ est le L -module engendré par \mathfrak{m} . Et on a bien sûr

$$I(\tilde{\mathfrak{m}}) = I_L(\tilde{\mathfrak{m}}) = I_L^{\widetilde{S_0(\mathfrak{m})}}.$$

Quelques résultats rapidement prouvables

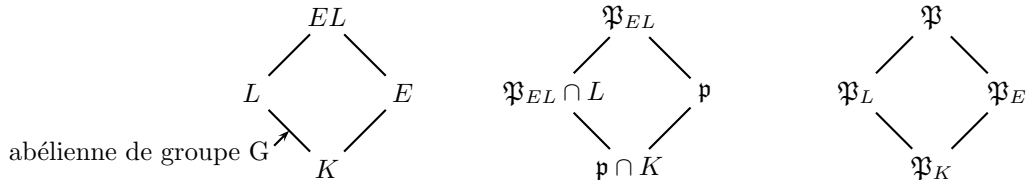
Théorème (0.6)

Soit L/K et E/K deux extensions finies d'un corps de nombres K . Supposons de plus que L/K soit une extension abélienne de groupe de Galois G . La théorie de Galois nous apprend que l'extension EL/E est aussi abélienne et que $H := \text{Gal}(EL/E)$ s'identifie à un sous-groupe de G via la restriction à L . Notons $R : H \rightarrow G$ cette restriction. Soit S un ensemble finie de places finies de K contenant toutes celles qui ramifient dans L , on a :

$$\Phi_{L/K}^S \circ N_{E/K} = R \circ \Phi_{EL/E}^{\tilde{S}_E}.$$

Preuve

On est dans la situation suivante :



Remarquons tout d'abord que $\Phi_{EL/E}$ est bien défini sur $I_E^{\tilde{S}_E}$. En effet, soit $\mathfrak{p} \notin \tilde{S}_E$. Il faut montrer que \mathfrak{p} ne ramifie pas dans EL . Soit donc \mathfrak{P}_{EL} un idéal de EL au-dessus de \mathfrak{p} . On a vu dans la partie

“Ramification...” que $T(\mathfrak{P}_{EL}/\mathfrak{p})$ pouvait être vu comme un sous-groupe de $T((\mathfrak{P}_{EL} \cap L)/(\mathfrak{P}_{EL} \cap K))$. Or, par définition de \tilde{S}_E et de S , $\mathfrak{P}_{EL} \cap K = \mathfrak{p} \cap K$ ne ramifie pas dans L , ce qui montre que $T((\mathfrak{P}_{EL} \cap L)/(\mathfrak{P}_{EL} \cap K)) = \{\text{Id}_L\}$, et donc que $T(\mathfrak{P}_{EL}/\mathfrak{p}) = \{\text{Id}_{EL}\}$ ce qui montre que \mathfrak{p} ne ramifie pas dans EL .

Soit, comme dans l’illustration ci-dessus \mathfrak{P} un idéal premier de O_{EL} . Posons $\mathfrak{P}_L = \mathfrak{P} \cap O_L$, $\mathfrak{P}_E = \mathfrak{P} \cap O_E$ et $\mathfrak{P}_K = \mathfrak{P} \cap O_K$ les idéaux au-dessous de \mathfrak{P} . On suppose que $\mathfrak{P}_K \notin S$. Posons $\sigma = \Phi_{EL/E}(\mathfrak{P}_E)$, $\tau = \Phi_{L/K}(\mathfrak{P}_K)$, $q = \mathbb{N}(\mathfrak{P}_K)$ et $N_{E/K}(\mathfrak{P}_E) = \mathfrak{P}_K^f$ où $f = f(\mathfrak{P}_E/\mathfrak{P}_K)$. Alors on a $\mathbb{N}(\mathfrak{P}_E) = q^f$. Par définition de σ , on a $\sigma(x) \equiv x^{\mathbb{N}(\mathfrak{P}_E)} \pmod{\mathfrak{P}}$ pour tout $x \in O_{EL}$, c’est-à-dire que $\sigma(x) \equiv x^{q^f} \pmod{\mathfrak{P}}$ pour tout $x \in O_{EL}$; cela implique que $\sigma(x) \equiv x^{q^f} \pmod{\mathfrak{P}_L}$ pour tout $x \in O_L$, car $\sigma|_L$ est un automorphisme de L . De même, $\tau(x) \equiv x^q \pmod{\mathfrak{P}_L}$, donc, en composant f fois, on trouve $\tau^f(x) \equiv x^{q^f} \pmod{\mathfrak{P}_L}$. On en déduit que $R \circ \sigma = \tau^f$, car les congruences qu’on vient de montrer donnent que $R \circ \sigma$ et τ^f induisent le même élément dans le groupe de Galois de l’extension $(O_L/\mathfrak{P}_L)/(O_K/\mathfrak{P}_K)$. Puisque \mathfrak{P}_K ne ramifie pas dans O_L , cette opération est injective sur les éléments de $Z(L/\mathfrak{P}_K)$ dont $R \circ \sigma$ et τ^f font partie (cf. partie “Ramification...”). On en déduit que

$$R \circ \Phi_{EL/E}(\mathfrak{P}_E) = \Phi_{L/K}(\mathfrak{P}_K)^f = \Phi_{L/K}(\mathfrak{P}_K^f) = \Phi_{L/K} \circ N_{E/K}(\mathfrak{P}_E).$$

On conclut par multiplicativité. #

Corollaire (0.7)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres, et $\Phi_{L/K} : I_K^S \rightarrow \text{Gal}(L/K)$, l’application d’Artin, alors on a $N_{L/K}(I_L^{\tilde{S}}) \subset \ker \Phi_{L/K}$.

Preuve

On applique le théorème précédent à $L = E$. Cela donne $\Phi_{L/K} \circ N_{L/K} = \Phi_{L/L} = \text{Id}_L$, ce qui prouve le corollaire. #

Définition (0.8)

Soit K un corps de nombres. On définit $P = P_K \subset I_K$ le sous-groupe des idéaux fractionnaires principaux de K . Il est bien connu que le groupe quotient I_K/P_K est un groupe fini (cf. [Sam, Thm. 2, chap IV, §3, p.71]) et évidemment réduit au groupe trivial si O_K est un anneau principal. On appelle ce groupe fini *le groupe des classes d’idéaux*; son cardinal se note $h = h_K$.

Soit \mathfrak{m} un K -module, on note $P(\mathfrak{m}) = P \cap I(\mathfrak{m})$. On note encore $K^*(\mathfrak{m}) = \{x \in K^* \mid O \cdot x \in P(\mathfrak{m})\} = \{x \in K^* \mid v_{\mathfrak{p}}(x) = 0 \text{ pour tout } \mathfrak{p} \in S_0(\mathfrak{m})\} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in S_0(\mathfrak{m})} O_{(\mathfrak{p})}^*$.

On note $P_{\mathfrak{m}} = \{O_K \cdot x \mid x \in K_{\mathfrak{m}}^*\}$. Remarquons que $O_K \cdot x = O_K \cdot y$ avec $x \in K_{\mathfrak{m}}^*$ n’implique pas forcément que $y \in K_{\mathfrak{m}}^*$. Nous allons aussi beaucoup étudier $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$ qu’on appellera *groupe de classes radiales modulo \mathfrak{m}* . En allemand Hasse l’appelle *Strahlklassengruppe modulo \mathfrak{m}* , et en anglais, on nomme cela *Ray class group modulo \mathfrak{m}* . Remarquons que si $\mathfrak{m} = O_K \cdot \emptyset = \mathbf{1}$, le groupe des classes radiales est le groupe des classes usuel dont on sait qu’il est fini. On note aussi $h_{\mathfrak{m}}$ le cardinal $|I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}|$. Nous allons montrer que ce cardinal est fini et même en donner une formule. Enfin, on notera $U_{\mathfrak{m}}$ pour $U_K \cap K_{\mathfrak{m}}^*$.

Lemme (0.9)

Soient K un corps de nombres et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux idéaux fractionnaires de K . Considérons \mathcal{C} la classe de \mathfrak{a} modulo P_K . Alors il existe $\mathfrak{c} \in \mathcal{C}$ tel que \mathfrak{c} soit premier à \mathfrak{b} , c'est-à-dire $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) \cdot v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{c}) = 0$ pour tout idéal premier \mathfrak{p} .

Preuve

C'est aussi un corollaire du théorème chinois. Supposons que \mathfrak{a} soit un "vrai" idéal de K . Posons $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}$, $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{N}$, et $\mathfrak{b} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b})}$. Soit V l'ensemble des idéaux premiers qui divisent \mathfrak{a} ou \mathfrak{b} . Pour tout $\mathfrak{p} \in V$, on choisit $x_{\mathfrak{p}} \in \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})} \setminus \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})+1}$. Par le théorème chinois, il existe $a \in O_K$ tel que $a \equiv x_{\mathfrak{p}} \pmod{\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})+1}}$. L'idéal fractionnaire $\frac{1}{a}\mathfrak{a}$ répond à la question, car $v_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{a}\mathfrak{a}) = v_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{a}) + v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = 0$ pour tout $\mathfrak{p} \in V$; et si $\mathfrak{p} \notin V$, alors $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{b}) = 0$.

Si \mathfrak{a} est un idéal fractionnaire quelconque, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' \cdot \mathfrak{a}''^{-1}$, où \mathfrak{a}' et \mathfrak{a}'' sont des idéaux de K . En construisant \mathfrak{a}' et $\mathfrak{a}'' \in O_K$ comme ci-dessus pour \mathfrak{a}' et \mathfrak{a}'' respectivement, on voit que l'idéal $\mathfrak{c} = \frac{\mathfrak{a}''}{\mathfrak{a}'} \cdot \mathfrak{a}$ possède les propriétés requises. #

Lemme (0.10)

Soient K un corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module. Alors on a l'isomorphisme

$$K^*(\mathfrak{m})/K_{\mathfrak{m}}^* \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in S_0(\mathfrak{m})} \left(O_{(\mathfrak{p})}/\tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})} \right)^* \times \{\pm 1\}^s,$$

où $s = |S_{\infty}(\mathfrak{m})|$ est le nombre de place infinie divisant \mathfrak{m} .

Preuve

Puisque $K^*(\mathfrak{m}) = \cap_{\mathfrak{p} \in S_0(\mathfrak{m})} O_{(\mathfrak{p})}^*$, tout $x \in K^*(\mathfrak{m})$ est tel que $(x \bmod \tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}) \in (O_{(\mathfrak{p})}/\tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})})^*$. En effet, $x \in O_{(\mathfrak{p})} \setminus \tilde{\mathfrak{p}}$, donc $x \cdot O_{(\mathfrak{p})} + \tilde{\mathfrak{p}} = O_{(\mathfrak{p})}$ ($\tilde{\mathfrak{p}}$ est un idéal maximal), par suite et par récurrence, on montre que $x \cdot O_{(\mathfrak{p})} + \tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})} = O_{(\mathfrak{p})}$, donc il existe $y \in O_{(\mathfrak{p})}$ et $\alpha \in \tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}$ tels que $yx + \alpha = 1$, ce qui veut dire que $(x \bmod \tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}) \in (O_{(\mathfrak{p})}/\tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})})^*$. Ainsi, l'homomorphisme

$$x \mapsto (x \bmod \tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})})_{\mathfrak{p} \in S_0(\mathfrak{m})} \times (\text{sgn}(\sigma_{\mathfrak{p}}(x)))_{\mathfrak{p} \in S_{\infty}(\mathfrak{m})}$$

est bien défini de $K^*(\mathfrak{m})$ dans le groupe de droite de l'isomorphisme cherché. Puisqu'on travaille dans $(O_{(\mathfrak{p})}/\tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})})^*$, dire que $x \equiv y \pmod{\tilde{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}}$ revient à dire que $x \equiv y \pmod{* \mathfrak{p}^{\mathfrak{m}(\mathfrak{p})}}$. Finalement, le théorème d'approximation débile montre que notre homomorphisme est surjectif et son noyau est clairement $K_{\mathfrak{m}}^*$. #

Lemme (0.11)

Soient K un corps de nombres et \mathfrak{a} un idéal de K . Alors

$$|(O_K/\mathfrak{a})^*| = \mathbb{N}(\mathfrak{a}) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \left(1 - \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \right)$$

Preuve

C'est une généralisation de la formule sur l'indicateur d'Euler. Par le théorème chinois et le fait que pour tout anneau produit, on a $(A \times B)^* = A^* \times B^*$, on a $(O_K/\mathfrak{a})^* = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} (O_K/\mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})})^*$. Commençons

donc par prouver que si $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^k$, $k \in \mathbb{N}$, alors $\left| (O_K/\mathfrak{p}^{k-1})^* \right| = \mathbb{N}(\mathfrak{p}^k) - \mathbb{N}(\mathfrak{p}^{k-1})$. On procède par récurrence sur k . Si $k = 1$, c'est évident, car O_K/\mathfrak{p} est un corps. Rappelons le fait élémentaire suivant : tout homomorphisme d'anneau $f : A \rightarrow B$ définit un homomorphisme de groupe $f^* : A^* \rightarrow B^*$ tel que $\ker(f^*) = (1 + \ker(f)) \cap A^*$; et si f est surjectif et que $(1 + \ker(f)) \subset A^*$, alors f^* est aussi surjective. Ainsi, supposons le théorème vrai pour $k-1$. L'homomorphisme surjectif $f : O_K/\mathfrak{p}^k \rightarrow O_K/\mathfrak{p}^{k-1}$ induit un homomorphisme $f^* : (O_K/\mathfrak{p}^k)^* \rightarrow (O_K/\mathfrak{p}^{k-1})^*$. Son noyau est $1 + \mathfrak{p}^{k-1}/\mathfrak{p}^k$ (car on montre que $1 + \mathfrak{p}^{k-1}/\mathfrak{p}^k \subset (O_K/\mathfrak{p}^k)^*$ par un argument similaire à celui du début du lemme précédent. Ainsi,

$$\left| (O_K/\mathfrak{p}^k)^* \right| = \left| (O_K/\mathfrak{p}^{k-1})^* \right| \cdot \left| 1 + \mathfrak{p}^{k-1}/\mathfrak{p}^k \right| \stackrel{(*)}{=} \left| (O_K/\mathfrak{p}^{k-1})^* \right| \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{p}) \stackrel{\text{hyp. de rec.}}{=} \mathbb{N}(\mathfrak{p}^k) - \mathbb{N}(\mathfrak{p}^{k-1}).$$

L'égalité $(*)$ vient du fait que $\left| 1 + \mathfrak{p}^{k-1}/\mathfrak{p}^k \right| = \left| \mathfrak{p}^{k-1}/\mathfrak{p}^k \right| = |O_K/\mathfrak{p}| = \mathbb{N}(\mathfrak{p})$. Et on conclut, si \mathfrak{a} est quelconque :

$$\left| (O_K/\mathfrak{a})^* \right| = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \mathbb{N}(\mathfrak{p}^k) - \mathbb{N}(\mathfrak{p}^{k-1}) = \mathbb{N}(\mathfrak{a}) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \left(1 - \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \right).$$

##

Théorème (0.12)

Soient K un corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module. Alors $h_{\mathfrak{m}}$ est fini. Plus précisément,

$$h_{\mathfrak{m}} = \frac{2^s \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{m}_0) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \right)}{[U_K : U_{\mathfrak{m}}]} \cdot h,$$

où s est le nombre de places infinies divisant \mathfrak{m} et h est cardinal du groupe des classes usuel.

preuve

On considère l'application composée $I_K(\mathfrak{m}) \xrightarrow{\text{incl.}} I \xrightarrow{\text{nat.}} I_K/P_K$. Elle est clairement surjective, car dans n'importe quelle classe d'idéaux usuelle, il est possible de trouver un représentant premier à un idéal fractionnaire fixé (ici, il s'agit de \mathfrak{m}_0 (cf. lemme (0.9)). Le noyau est clairement $P_K(\mathfrak{m})$. Ainsi, $I_K(\mathfrak{m})/P_K(\mathfrak{m}) \simeq I_K/P_K$. Or, $P_{\mathfrak{m}} \subset P_K(\mathfrak{m})$. Donc, on a une suite exacte de groupes abéliens :

$$1 \longrightarrow P_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} \longrightarrow I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} \longrightarrow I_K(\mathfrak{m})/P_K(\mathfrak{m}) \longrightarrow 1.$$

Il suffit ainsi de montrer que $P_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$ est fini, de calculer son cardinal et conclure car $h_{\mathfrak{m}} = |P_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}| \cdot h$, par ce qui précède. L'application $K^*(\mathfrak{m}) \rightarrow P(\mathfrak{m})$ est par définition un homomorphisme surjectif. Donc en composant avec la projection canonique, on a un homomorphisme surjectif $K^*(\mathfrak{m}) \rightarrow P(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$. Le noyau de cet homomorphisme est clairement $U_K \cdot K_{\mathfrak{m}}^*$. Les Lemmes (0.10) et (0.11) nous montrent que $|K^*(\mathfrak{m})/K_{\mathfrak{m}}^*| = 2^s \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{m}_0) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} \left(1 - \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \right)$.

D'autre part, $K^*(\mathfrak{m}) \supset U_K \cdot K_{\mathfrak{m}}^* \supset K_{\mathfrak{m}}^*$. Par les théorèmes d'isomorphismes (partie c)), on a alors que $U_K \cdot K_{\mathfrak{m}}^*/K_{\mathfrak{m}}^* \simeq U_K/U_K \cap K_{\mathfrak{m}}^*$; et on a par définition que $U_{\mathfrak{m}} = U_K \cap K_{\mathfrak{m}}^*$. Cela montre le théorème. ##

Voici un lemme très important quand on parle de cyclotomie, et c'est ce que nous allons faire les prochains théorèmes :

Lemme (0.13)

Soit $m \in \mathbb{N}$ et K un corps de nombre contenant une racine m -ième de l'unité ζ_m . Soit $p \in \mathbb{P}_0(\mathbb{Q})$ tel que $p \nmid m$. Soit \mathfrak{p} un idéal de K au-dessus de p , c'est-à-dire que $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$. L'application

$\phi : O_K \longrightarrow O_K/\mathfrak{p} := \mathbb{F}$ envoie évidemment \mathbb{Z} sur $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et donc $|\mathbb{F}| = \mathbb{N}(\mathfrak{p}) = p^f = q$ où $f = [O_K/\mathfrak{p} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]$. Alors on a $m|q-1$. Plus précisément, le groupe $\{\zeta_m^i \mid 1 \leq i \leq m\} \subset O_K$ est envoyé injectivement par ϕ . Son image est donc un sous-groupe cyclique d'ordre de m de \mathbb{F}^* .

Preuve

Il suffit de vérifier que $\zeta_m \not\equiv \zeta_m^i \pmod{\mathfrak{p}}$ pour tout $2 \leq i \leq m$. Soit $f = \prod_{i=1}^m (x - \alpha_i)$ un polynôme. Alors le polynôme dérivé évalué en α_1 vaut $f'(\alpha_1) = \prod_{i=2}^m (\alpha_1 - \alpha_i)$. On applique cela à $f = X^m - 1 = \prod_{i=1}^m (X - \zeta_m^i)$. On trouve alors $\prod_{i=2}^m (\zeta_m - \zeta_m^i) = m\zeta_m^{m-1}$. Puisque \mathfrak{p} est un idéal premier et que ni m , ni ζ_m ne sont dans \mathfrak{p} , on en déduit que $\prod_{i=2}^m (\zeta_m - \zeta_m^i) \notin \mathfrak{p}$, donc aucun $\zeta_m - \zeta_m^i$ n'est dans \mathfrak{p} . \neq

Nous allons maintenant montrer un exemple important qu'on pourrait qualifier d'exemple générique. En effet, c'est le premier résultat qui donne un lien entre le groupe de Galois d'une extension et un groupe de classes radiales. Tous les autres grands résultats de la théorie du corps de classe seront "inspiré" de cet exemple.

Théorème (0.14)

Soit $m \in \mathbb{Z}$, $m > 1$, $m \not\equiv 2 \pmod{4}$. Posons $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ et $S = \{p \in \mathbb{P}_0(\mathbb{Q}) \mid p|m\}$. Alors évidemment, $I_K^S = I_K(\mathfrak{m})$, avec $\mathfrak{m} = m\mathbb{Z} \cdot \infty$ où ∞ est l'unique place infinie de \mathbb{Q} . Alors on a

$$I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} \simeq \text{Gal}(L/K).$$

Preuve

L'ensemble $\{\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^* \mid a, b \in \mathbb{Z}, \text{ positifs, premiers à } m\}$ est identifiable à I_K^S , car tout idéal fractionnaire de \mathbb{Q} est engendré par deux éléments, et on choisit le positif. Soit $p \notin S$. Par définition de l'application d'Artin, on a dans ce cas, $\Phi_{L/K}(p) = \sigma_p \in \text{Gal}(L/K)$ caractérisé par $\sigma_p(\zeta_m) \equiv \zeta_m^p \pmod{\mathfrak{p}}$ pour tout idéal premier \mathfrak{p} de L au-dessus de p . Le Lemme (0.13) nous montre alors que $\sigma_p(\zeta_m) = \zeta_m^p$. On compose $\Phi_{L/K}$ avec l'isomorphisme $\text{Gal}(L/K) \xrightarrow{\sim} (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$; on notera cette composition $\Psi_{L/K}$. Il est clair que $\Psi_{L/K}(\frac{a}{b}) = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$, où \bar{a} et \bar{b} sont les classes de a et b modulo m . Cette application est évidemment surjective. Et on a $\ker \Phi_{L/K} = \ker \Psi_{L/K} = \{\frac{a}{b} \in I_K^S \mid a \equiv b \pmod{m}\} \simeq P_{\mathfrak{m}}$ où $\mathfrak{m} = m\mathbb{Z} \cdot \infty$. On a donc prouvé que $I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} \simeq \text{Gal}(L/K)$. \neq

Définition (0.15)

Soit L/K une extension de corps de nombres. Cette extension est appelée *cyclotomique* s'il existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ tel que $K \subset L \subset K(\zeta_m)$. Puisque l'extension $K(\zeta_m)/K$ est abélienne, l'extension L/K est en particulier abélienne aussi.

Théorème (0.16)

Soit $K \subset L \subset K(\zeta_m)$ une extension cyclotomique de corps de nombres. Soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}_{\infty}$, un K -module tel que $m|m_0$ (c'est-à-dire que $m \cdot O_K \supset \mathfrak{m}_0$) et tel que \mathfrak{m}_{∞} est l'ensemble de toutes les places réelles de K . Alors l'application d'Artin $\Phi_{L/K}^{\mathfrak{m}} : I_K(\mathfrak{m}) \rightarrow G := \text{Gal}(L/K)$ est bien définie et $P_{\mathfrak{m}} \subset \ker \Phi_{L/K}^{\mathfrak{m}}$.

Preuve

Les idéaux de premiers de K qui ramifient dans L ramifient aussi dans $K(\zeta_m)$, donc divisent m . Donc, $\Phi_{L/K}^m$ est bien définie. Puisque $\Phi_{L/K}^m = R \circ \Phi_{K(\zeta_m)/K}^m$, où R est la restriction $\text{Gal}(K(\zeta_m)/K) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ (Théorème (0.6)), on peut supposer que $L = K(\zeta_m)$. On prend donc $L = K(\zeta_m)$. Appelons $i : \text{Gal}(K(\zeta_m)/K) \rightarrow (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ l'homomorphisme injectif usuel. Si \mathfrak{p} est un idéal premier avec $\mathfrak{p} \in I_K(\mathfrak{m})$, on sait que $\Phi_{L/K}^m(\mathfrak{p}) = \sigma$ tel que $\sigma(\zeta_m) \equiv \zeta_m^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \pmod{\mathfrak{P}}$ où \mathfrak{P} est n'importe quel idéal premier de $K(\zeta_m)$ au-dessus de \mathfrak{p} . Par le Lemme (0.13), on en déduit que $\sigma(\zeta_m) = \zeta_m^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})}$. Ainsi, $i(\Phi_{L/K}^m(\mathfrak{p})) = \overline{\mathbb{N}(\mathfrak{p})}$, où $\overline{\mathbb{N}(\mathfrak{p})}$ est la classe de $\mathbb{N}(\mathfrak{p})$ modulo m . Par multiplicité, on en déduit que $i(\Phi_{L/K}^m(\mathfrak{a})) = \overline{\mathbb{N}(\mathfrak{a})}$ pour tout $\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{m})$. Soit $xO_K \in P_m$. On peut supposer que $x \in K_m^*$. Par définition de K_m^* , x est totalement positif, donc $N_{K/\mathbb{Q}}(x) = |N_{K/\mathbb{Q}}(x)| \in \mathbb{Q}_+^*$. Donc, $\mathbb{N}(xO_K) = N_{K/\mathbb{Q}}(x)$, et ainsi,

$$i(\Phi_{L/K}^m(xO_K)) = \overline{N_{K/\mathbb{Q}}(x)}. \quad (i)$$

D'autre part, $x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$, cela implique puisque $m \cdot O_K \supset \mathfrak{m}_0$, que $x - 1 \in m \cdot \bigcap_{\mathfrak{p}|m} O_{(\mathfrak{p})}$. Soit E/K une extension telle que E/\mathbb{Q} soit galoisienne. Notons $\tilde{O} = O_E$. Pour tout élément $\tau \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$, on a $\tau(x) - 1 \in m \cdot \bigcap_{\mathfrak{p}|m} \tilde{O}_{(\mathfrak{p})}$ (\mathfrak{P} est bien sûr un idéal premier de \tilde{O}). Par conséquent, puisque $N_{K/\mathbb{Q}}(x)$ est un produit de certains de ces $\tau(x)$, on aura $N_{K/\mathbb{Q}}(x) - 1 \in m \cdot \bigcap_{\mathfrak{p}|m} \tilde{O}_{(\mathfrak{p})} \cap \mathbb{Q} = m \cdot \bigcap_{p|m} \mathbb{Z}_{(p)} := m \cdot \mathbb{Z}_{(m)}$. Cela implique que $N_{K/\mathbb{Q}}(x) \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ ce qui implique par (i) et puisque $\mathbb{Z}_{(m)}/m\mathbb{Z}_{(m)} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ que $i(\Phi_{L/K}^m(xO_K)) = \overline{1}$, et donc (puisque i est injectif) que $\Phi_{L/K}^m(xO_K)$ est l'unité du groupe de Galois $\text{Gal}(L/K)$ et donc que $P_m \subset \ker \Phi_{L/K}^m$. ≠

Remarquons que ce théorème sera redémontré “en passant” au Chapitre 7 (Proposition (7.6)). Mais pour une raison technique, nous aurons besoin de ce résultat pour montrer le théorème de Čebotarev pour les extensions cyclotomiques (Proposition (3.2)), c'est pourquoi, nous l'avons déjà mis ici.

Voici encore un résultat intéressant en lui-même qui relève plutôt de la théorie de Galois et que nous utiliserons 2 fois : la première au Chapitre 3 (Théorème (3.12)) et la seconde au Chapitre 12 (Théorème (12.11)) :

Théorème (0.17)

Soit $K \subset E \subset L$ des corps de nombres. On suppose L/K galoisienne et on pose $G = \text{Gal}(L/K)$ et $H = \text{Gal}(L/E) \subset G$. On note X l'ensemble des classes à droite de G modulo H . Il est clair que $|X| = [E : K]$. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de K et \mathfrak{P} un idéal premier de L au dessus de \mathfrak{p} . On suppose \mathfrak{P} non ramifié sur \mathfrak{p} . Soit encore $\sigma = \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ qui est le générateur de $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, le groupe de décomposition de \mathfrak{P} sur \mathfrak{p} . On fait agir $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ sur X qui se décompose en r orbites C_1, \dots, C_r de longueur respectivement f_1, \dots, f_r . Pour fixer les esprits, il existe $\tau_1, \dots, \tau_r \in G$ tels que

$$C_i = \{H \cdot \tau_i, H \cdot \tau_i \cdot \sigma, \dots, H \cdot \tau_i \cdot \sigma^{f_i-1}\},$$

pour $i = 1, \dots, r$. Alors, en posant $\mathfrak{p}_i = \tau_i(\mathfrak{P}) \cap E$, pour $i = 1, \dots, r$, on a la liste exacte des idéaux premiers de E au-dessus de \mathfrak{p} , c'est-à-dire $\mathfrak{p} \cdot O_E = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$. Et de plus, on a $f_i = f(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p})$.

Preuve

Il est clair que les \mathfrak{p}_i sont des idéaux premiers au-dessus de \mathfrak{p} . Montrons d'abord que \mathfrak{p}_i ne dépend que de C_i . Fixons donc une de ces classes C_i . Tout d'abord, si $H \cdot \tau_i = H \cdot \tau'_i$, alors $\tau'_i = h \cdot \tau_i$ pour un $h \in H$. Alors on a, puisque $h|_E$ est l'identité :

$$\tau'_i(\mathfrak{P}) \cap E = h(\tau_i(\mathfrak{P})) \cap E = h(\tau_i(\mathfrak{P})) \cap h(E) \stackrel{\text{h inj.}}{=} h(\tau_i(\mathfrak{P}) \cap E) = \tau_i(\mathfrak{P}) \cap E.$$

D'autre part, si on prend un élément de C_i , disons $H \cdot \tau_i \cdot \sigma^j$, alors on a :

$$(\tau_i \cdot \sigma^j)(\mathfrak{P}) \cap E = \tau_i(\sigma^j(\mathfrak{P})) \cap E \stackrel{\sigma \in Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})}{=} \tau_i(\mathfrak{P}) \cap E.$$

Donc, \mathfrak{p}_i ne dépend bien que de C_i . Fixons donc un $H \cdot \tau \in C_i$. Alors $f_i = |C_i|$ = l'indice du stabilisateur de $H \cdot \tau$ dans $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Ce stabilisateur est

$$\{\eta \in Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \mid H \cdot \tau \cdot \eta = H \cdot \tau\} = \{\eta \in Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \mid \eta \in \tau^{-1} \cdot H \cdot \tau\} = Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cap \tau^{-1} \cdot H \cdot \tau.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |C_i| &= [Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) : Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cap \tau^{-1} \cdot H \cdot \tau] = [\tau \cdot Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cdot \tau^{-1} : \tau \cdot Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cdot \tau^{-1} \cap H] \\ &= [Z(\tau(\mathfrak{P})/\mathfrak{p}) : Z(\tau(\mathfrak{P})/\mathfrak{p}) \cap H] = [Z(\tau(\mathfrak{P})/\mathfrak{p}) : Z(\tau(\mathfrak{P})/\underbrace{\tau(\mathfrak{P}) \cap E}_{=\mathfrak{p}_i})] \\ &= \frac{f(\tau(\mathfrak{P})/\mathfrak{p})}{f(\tau(\mathfrak{P})/\mathfrak{p}_i)} \stackrel{f \text{ mult.}}{=} f(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}). \end{aligned}$$

Donc les \mathfrak{p}_i ont la propriété cherchée. En effet, si \mathfrak{p}_0 est un idéal premier de E au-dessus de \mathfrak{p} , alors il existe $\tau \in G$ tel que $\mathfrak{p}_0 = \tau(\mathfrak{p}) \cap E$ (propriété galoisienne). Donc $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}_i$, où i est tel que C_i est l'orbite qui contient $H \cdot \tau$. Enfin,

$$\sum_{i=1}^r f(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}) = \sum_{i=1}^r |C_i| = |X| = [E : K].$$

De sorte que les \mathfrak{p}_i sont deux à deux disjoints. #

Chapitre 1 :

Un résultat sur $j(x, \mathfrak{K})$

Ce chapitre est en fait consacré à la preuve d'un unique théorème qui sera utilisé au chapitre suivant. Voici l'énoncé de ce résultat :

Théorème (1.1)

Soit K un corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module. Alors il existe une constante $\rho_{\mathfrak{m}} > 0$ telle que si \mathfrak{K} est une classe de $I_K(\mathfrak{m})$ modulo $P_{\mathfrak{m}}$, et si $j(x, \mathfrak{K})$ est le nombre d'idéaux (entiers) $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}$ tels que $N(\mathfrak{a}) \leq x$. Alors

$$j(x, \mathfrak{K}) = \rho_{\mathfrak{m}} \cdot x + O(x^{1-\frac{1}{n}})$$

où $n = [K : \mathbb{Q}]$, et si $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions réelles, on écrit $f(x) = O(g(x))$ lorsqu'il existe une constante $B > 0$ tel que $|f(x)| < B \cdot |g(x)|$.

Notations

Pour tout ce chapitre, fixons K un corps de nombres, $[K : \mathbb{Q}] = n = r + 2s$, où r est le nombre de places infinies réelles et s le nombre de places infinies complexes. Soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \mathfrak{m}_{\infty}$ un K -module. Posons r_0 le nombre de places réelles qui divisent \mathfrak{m} . Posons

$$\begin{aligned} v = v_{\mathfrak{m}} : K &\rightarrow \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \\ \alpha &\mapsto (\sigma_1(\alpha), \dots, \sigma_{r_0}(\alpha), \sigma_{r_0+1}(\alpha), \dots, \sigma_r(\alpha), \sigma_{r+1}(\alpha), \dots, \sigma_{r+s}(\alpha)) \end{aligned}$$

avec $\sigma_1, \dots, \sigma_{r_0}$ les plongements correspondant aux places (réelles) qui divisent \mathfrak{m} , $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ les plongements correspondant aux places réelles et $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s}$ les plongements correspondant aux places complexes; on pose pour $j = 1, \dots, s$, $\sigma_{r+s+j} = \overline{\sigma_{r+j}}$. On définit encore

$$\begin{aligned} l : K^* &\rightarrow \mathbb{R}^{s+r} \\ \alpha &\mapsto (\log |\sigma_1(\alpha)|, \dots, \log |\sigma_r(\alpha)|, 2 \log |\sigma_{r+1}(\alpha)|, \dots, 2 \log |\sigma_{r+s}(\alpha)|) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} l_0 : \mathbb{R}^{*n} &\simeq \mathbb{R}^{*r} \times \mathbb{C}^{*s} \rightarrow \mathbb{R}^{r+s} \\ (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) &\mapsto (\log |x_1|, \dots, \log |x_r|, 2 \log |y_1|, \dots, 2 \log |y_s|) \end{aligned}$$

Il est évident que si $\alpha \neq 0$, on a $l(\alpha) = l_0(v(\alpha))$. Enfin on pose

$$\begin{aligned} N_0 : \mathbb{R}^{*n} &\simeq \mathbb{R}^{*r} \times \mathbb{C}^{*s} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) &\mapsto |x_1| \cdots |x_r| \cdot |y_1|^2 \cdots |y_s|^2. \end{aligned}$$

Si on pose $N(\alpha) = |N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)|$, on a $N(\alpha) = N_0(v(\alpha))$.

Fixons encore \mathfrak{K} une classe de $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$. On remarque déjà qu'il existe \mathfrak{b} un idéal entier (i.e. inclus dans O_K) dans la classe \mathfrak{K}^{-1} . En effet, si $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{d}}$ est un idéal fractionnaire d'une classe quelconque de $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$ avec \mathfrak{c} et \mathfrak{d} des idéaux entiers, alors il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{d}^t \in P_{\mathfrak{m}}$, puisque $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$ est fini (cf.

Théorème (0.12)). Alors $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{d}^t = \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{d}^{t-1}$ est un idéal entier dans la même classe que $\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{b}}$. Fixons donc un de ces \mathfrak{b} dans \mathfrak{K}^{-1} . Soit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}$, un idéal. On a alors $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\alpha) \in P_{\mathfrak{m}}$, i.e. $\alpha \in K_{\mathfrak{m}}^* \cap O_K$. Fixons enfin $\alpha_0 \in O_K$ tel que $\alpha_0 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{b}}$ et $\alpha_0 \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_0}$ (c'est possible grâce au théorème chinois, et puisque \mathfrak{b} et \mathfrak{m}_0 sont premiers entre eux).

Lemme (1.2)

Sous les mêmes notations que précédemment, on a $j(x, \mathfrak{K})$ est égal au nombre d'idéaux principaux (α) avec

- a) $\alpha \equiv \alpha_0 \pmod{\mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{b}}$
- b) $\sigma_i(\alpha) > 0 \quad i = 1, \dots, r_0$
- c) $0 < N(\alpha) \leq x \cdot N(\mathfrak{b})$.

Preuve

Si $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}$ est un idéal tel que $N(\mathfrak{a}) \leq x$, alors $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = (\alpha) \in P_{\mathfrak{m}}$, donc α est tel que $\sigma_i(\alpha) > 0$ pour $i = 1, \dots, r_0$, $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_0}$; d'autre part $\alpha \in \mathfrak{b}$ et $N(\alpha) = N(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) = N(\mathfrak{a}) \cdot N(\mathfrak{b}) \leq x \cdot N(\mathfrak{b})$. Cela prouve que α satisfait les conditions a), b) et c). Réciproquement, si α vérifie ces trois conditions, on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{-1} \cdot (\alpha) \in \mathfrak{K}$ est un idéal entier, car $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^{-1} \cdot (\alpha) \subset \mathfrak{b}^{-1} \cdot \mathfrak{b} = O_K$; et $N(\mathfrak{a}) = N(\mathfrak{b})^{-1} \cdot N(\alpha) \leq x$. Ce qui prouve notre lemme. #

Notons temporairement U les unités de O_K . Si α satisfait les conditions a), b) et c), alors l'ensemble des β tels que $(\alpha) = (\beta)$ et qui vérifient aussi a), b) et c) est exactement l'ensemble des $\alpha \cdot u$, avec $u \in U_{\mathfrak{m}}$ ($= U \cap K_{\mathfrak{m}}^*$). La preuve du théorème des unités de Dirichlet montre que $l(U)$ est un sous- \mathbb{Z} -module libre de rang $r + s - 1$ de \mathbb{R}^{r+s} et le sous-espace qu'il engendre est l'hyperplan H des $(x_i)_{1 \leq i \leq r+s}$ tels que $\sum_{i=1}^{r+s} x_i = 0$; et alors $U \simeq W \times l(U)$ où W est le sous-groupe de U formé des racines de l'unité (il est fini et cyclique). Puisque $U_{\mathfrak{m}}$ est d'indice fini dans U (cf. Théorème (0.12)), il a les mêmes propriétés que U , c'est-à-dire que l'on a $U_{\mathfrak{m}} \simeq W_{\mathfrak{m}} \times l(U_{\mathfrak{m}})$ où $W_{\mathfrak{m}} = W \cap U_{\mathfrak{m}}$, et $l(U_{\mathfrak{m}})$ est un \mathbb{Z} module de rang $r + s - 1$ qui engendre le \mathbb{R} -sous-espace H . Notons $w_{\mathfrak{m}}$ le cardinal de $W_{\mathfrak{m}}$ et on choisit e_1, \dots, e_{r+s-1} une \mathbb{Z} -base de $l(U_{\mathfrak{m}})$ (donc aussi une \mathbb{R} -base de H) que l'on complète en une \mathbb{R} -base de \mathbb{R}^{r+s} en ajoutant $e_0 = (\underbrace{1, \dots, 1}_{r \text{ fois}}, 2, \dots, 2)$. En vertu de la première remarque de ce paragraphe, on peut, pour chaque idéal principal comme dans le Lemme (1.2), choisir un générateur α , qui outre a), b), c) vérifie la condition

$$l(\alpha) = c_0 e_0 + \sum_{i=1}^{r+s-1} c_i e_i \quad \text{avec } 0 \leq c_i < 1 \text{ pour } i = 1, \dots, r + s - 1.$$

Dans ce cas α est entièrement déterminé à un facteur $w \in W_{\mathfrak{m}}$ près. On a ainsi montré le

Lemme (1.3)

Sous les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, on a $w_{\mathfrak{m}} \cdot j(x, \mathfrak{K})$ est le nombre d'éléments $\alpha \in \alpha_0 + \mathfrak{b}\mathfrak{m}_0$ tels que

$$\begin{aligned} &\sigma_i(\alpha) > 0 \text{ si } 1 \leq i \leq r_0, \quad 0 < N_0(v(\alpha)) \leq x \cdot N(\mathfrak{b}) \quad \text{et} \\ &l(\alpha) = c_0 e_0 + \sum_{i=1}^{r+s-1} c_i e_i \quad \text{avec } 0 \leq c_i < 1 \text{ pour } i = 1, \dots, r + s - 1. \end{aligned}$$

#

Interrompons-nous un instant dans notre discours pour énoncer un petit lemme sur le plongement v vu au début de ce chapitre.

Lemme (1.4)

Soit K/\mathbb{Q} un corps de nombres. Alors $v(O_K)$ est un \mathbb{Z} -réseau plein de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire un sous- \mathbb{Z} -module libre de rang n de \mathbb{R}^n contenant une \mathbb{R} -base de \mathbb{R}^n .

Preuve

L'homomorphisme v est clairement injectif, donc $v(O_K)$ est évidemment un \mathbb{Z} -module de rang n . Reste à voir qu'il est plein. Soit $\omega_1, \dots, \omega_n$ une \mathbb{Z} -base de O_K . Il suffit de voir que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} \sigma_1(\omega_1) & \cdots & \cdots & \sigma_1(\omega_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_r(\omega_1) & \cdots & \cdots & \sigma_r(\omega_n) \\ \Re \sigma_{r+1}(\omega_1) & \cdots & \cdots & \Re \sigma_{r+1}(\omega_n) \\ \Im \sigma_{r+1}(\omega_1) & \cdots & \cdots & \Im \sigma_{r+1}(\omega_n) \\ \vdots & & & \vdots \\ \Re \sigma_{r+s}(\omega_1) & \cdots & \cdots & \Re \sigma_{r+s}(\omega_n) \\ \Im \sigma_{r+s}(\omega_1) & \cdots & \cdots & \Im \sigma_{r+s}(\omega_n) \end{pmatrix}$$

est de déterminant non nul. On vérifie sans peine (en utilisant la relation $2\Im(z) + i \cdot z = i \cdot \bar{z}$) que ce déterminant vaut $2^{-s} \cdot i^s \cdot \det(\sigma_i(\omega_j)_{1 \leq i, j \leq n})$ avec une "bonne" numérotation des σ_i . donc $|\det(A)| = 2^{-s} \cdot |d(K)|^{\frac{1}{2}}$, où $d(K)$ est le discriminant de K sur \mathbb{Q} qui est non nul (cf. [Sam, §2.7, Proposition 3, p. 47]).

#

Notation

On notera Γ l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^s \simeq \mathbb{R}^n$ tels que

- i) les r_0 premières coordonnées de x sont > 0 .
- ii) $0 < N_0(x) \leq 1$.
- iii) $l_0(x) = c_0 e_0 + \sum_{i=1}^{r+s-1} c_i e_i$, avec $0 \leq c_i < 1$ pour $1 \leq i \leq r+s-1$.

On voit facilement que si $t > 0$, $l_0(tx) = l_0(x) + \log(t) \cdot e_0$ (ceci grâce à la définition judicieuse de e_0 !!). De sorte que x remplit la condition iii) si et seulement si tx la remplit. Donc l'ensemble $t \cdot \Gamma$ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^s \times \mathbb{C}^s$ qui satisfont les conditions i) et iii) précédentes et la condition $0 < N_0(x) \leq t^n$. Posons $\Lambda = v(\mathfrak{bm}_0)$. C'est un \mathbb{Z} -réseau plein de \mathbb{R}^n (c'est-à-dire un sous- \mathbb{Z} -module libre de rang n de \mathbb{R}^n contenant une \mathbb{R} -base de \mathbb{R}^n), car $v(O_K)$ en est un grâce au lemme précédent et \mathfrak{bm}_0 est d'indice fini dans O_K . Posons enfin $\Lambda_0 = v(\alpha_0 + \mathfrak{bm}_0) = v(\alpha_0) + \Lambda$, le translaté de Λ par $v(\alpha_0)$. Ce qui précède se traduit alors ainsi :

Lemme (1.5)

Sous les mêmes notations, soit pour tout $t > 0$, $M(t)$ le nombre d'éléments de Λ_0 contenu dans $t \cdot \Gamma$, alors on a

$$w_{\mathfrak{m}} \cdot j(x, \mathfrak{K}) = M(t) \quad \text{où } t^n = x \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{b}).$$

#

On va faire maintenant un “rappel” sur la mesure de Jordan (voir [Apo] pour les détails).

Rappel

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ borné. Un *pavé* dans \mathbb{R}^n est un produit d’intervalles bornés de \mathbb{R} . Le volume d’un tel pavé est le produit des longueurs de ces intervalles (les intervalles peuvent être ouverts, fermés, semi-ouverts ou un point (dans ce cas, le volume est nul)). Le *volume extérieur* de A , $\overline{v}(A)$, est l’infimum des $\sum_{i=1}^N \text{vol}(P_i)$ pris sur tout recouvrement $\{P_1, \dots, P_N\}$ de A par un nombre fini de pavés. Le *volume intérieur* $\underline{v}(A)$ est le supremum des $\sum_{i=1}^N \text{vol}(P_i)$ pris sur toute famille de pavés $\{P_1, \dots, P_N\}$ telles que $\overset{\circ}{P}_i \cap \overset{\circ}{P}_j = \emptyset$ pour tout $i \neq j$ ($\overset{\circ}{P}_i$ veut dire l’intérieur de P_i) et $\cup_i P_i \subset \overset{\circ}{A}$. On a toujours $\underline{v}(A) \leq \overline{v}(A)$. On dit alors que A est *J-mesurable* (J pour Jordan) si $\underline{v}(A) = \overline{v}(A)$. On pose alors $\text{vol}(A) = \underline{v}(A) = \overline{v}(A)$. Remarquons que si M est une matrice $n \times n$, et P un pavé, alors $\text{vol}(M \cdot P) = |\det(M)| \cdot \text{vol}(P)$, ainsi le volume de tout parallélotope est connu.

Théorème (1.6)

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ est borné, il est *J-mesurable* si et seulement si $\overline{v}(\partial A) = 0$ (où ∂A , le bord de A veut dire $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, et \overline{A} est l’adhérence de A).

Preuve

Cf. [Apo, Thm. 14.9, p. 397].

#

Définition (1.7)

Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont des espaces métriques $f : X \rightarrow Y$ est dite *lipschitzienne* s’il existe $M > 0$ tel que $d_Y(f(x), f(y)) \leq M \cdot d_X(x, y)$ pour tout $x, y \in X$. On appellera M *constante de Lipschitz*. Toute fonction lipschitzienne est en particulier continue. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est telle que les dérivées partielles existent et sont continues, alors f est lipschitzienne sur tout intervalle compact.

Théorème (1.8)

Si $f : [0; 1]^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne et $k < n$. Alors $\overline{v}(f([0, 1]^k)) = 0$.

Preuve

On a donc par hypothèse il existe $M > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ pour tout $x, y \in [0; 1]^k$. Découpons $[0; 1]^k$ en N^k sous-cubes de côtés $\frac{1}{N}$. Si C est l’un de ces cubes, alors $f(C)$ sera de diamètre $\leq M \cdot \sqrt{k} \cdot \frac{1}{N}$. Si on pose $B = (M \cdot \sqrt{k} + 2)^n$, alors $f(C)$ rencontre au plus B sous-cubes de \mathbb{R}^n de la forme $[\frac{i_1}{N}; \frac{i_1+1}{N}] \times \dots \times [\frac{i_n}{N}; \frac{i_n+1}{N}]$, avec $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$. Ainsi $f([0; 1]^k)$ est inclus dans la réunion d’au plus $B \cdot N^k$ cubes de côté $\frac{1}{N}$, donnant un volume inférieur ou égal à $B \cdot \frac{N^k}{N^n} = \frac{B}{N^{n-k}} < \varepsilon$ si N est assez grand. Ce qui prouve que le volume extérieur est aussi petit que l’on veut.

#

Définition (1.9)

Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est dite $(n-1)$ -*Lipschitz paramétrisable* si A est contenu dans la réunion d’un nombre fini d’images d’applications lipschitzienne $f_i : [0; 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Théorème (1.10)

Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ bornée. On suppose que ∂A est $(n-1)$ -Lipschitz paramétrisable. Soit Λ un réseau (ou translaté de réseau) dans \mathbb{R}^n . Posons $N(t)$ le nombre de points de Λ contenu dans $t \cdot A$. Soit $\text{vol}(\Lambda)$ le volume d'un parallélotope fondamental de Λ . Alors A est J -mesurable et

$$N(t) = \frac{\text{vol}(A)}{\text{vol}(\Lambda)} \cdot t^n + O(t^{n-1}).$$

On rappelle que $f(x) = O(g(x))$ veut dire qu'il existe une constante B telle que $|f(x)| \leq B \cdot |g(x)|$.

Preuve

Le Théorème (1.8) et un petit raisonnement sur les recouvrements d'une union finie d'ensemble montrent que $\bar{\nu}(\partial A) = 0$ donc par le Théorème (1.7) que A est J -mesurable. Soit P le parallélotope fondamental de Λ . Posons $n(t)$ le nombre de $x \in \Lambda$ tels que $x + P \subset t \cdot \overset{\circ}{A}$ et $s(t)$ le nombre de $x \in \Lambda$ tels que $(x + P) \cap t \cdot \bar{A} \neq \emptyset$. Il est clair que $n(t) \leq N(t) \leq s(t)$, et donc que $n(t) \cdot \text{vol}(P) \leq \text{vol}(t \cdot A) = t^n \cdot \text{vol}(A) \leq s(t) \cdot \text{vol}(P)$, ou encore $n(t) \leq \frac{\text{vol}(A)}{\text{vol}(\Lambda)} \cdot t^n \leq s(t)$. Cela implique que $|N(t) - \frac{\text{vol}(A)}{\text{vol}(\Lambda)} \cdot t^n| \leq s(t) - n(t)$. Il suffit donc de montrer que $s(t) - n(t) = O(t^{n-1})$.

Nous avons que $s(t) - n(t)$ est le nombre de $x \in \Lambda$ tels que $(x + P) \cap (\partial tA) \neq \emptyset$. Par hypothèse ∂A est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'images d'applications lipschitziennes $f_i : [0; 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Il suffit donc de montrer que si $f : [0; 1]^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est lipschitzienne, alors le nombre $R(t)$ des $x \in \Lambda$ tels que $(x + P) \cap t \cdot f([0; 1]^{n-1}) \neq \emptyset$ est un $O(t^{n-1})$.

Divisons $[0; 1]^{n-1}$ en $[t]^{n-1}$ sous-cubes de côté $\frac{1}{[t]}$ (ne pas confondre l'intervalle $[0; 1]$ avec la partie entière de t qu'on note $[t]$). Soit C un de ces sous-cubes. On a que $f(C)$ est de diamètre $\leq M \cdot \sqrt{n-1} \cdot \frac{1}{[t]} \leq \frac{2M\sqrt{n-1}}{t}$ (si $t \geq 3$). Donc, $t \cdot \text{diam}(f(C)) = \text{diam}(t \cdot f(C)) \leq 2M\sqrt{n-1}$. Cela implique qu'il existe une constante $B > 0$, indépendante de C et de t telle que $t \cdot f(C)$ rencontre au plus B régions de la forme $x + P$ ($x \in \Lambda$). Donc, $t \cdot f([0; 1]^{n-1})$ rencontre au plus $B \cdot [t]^{n-1} \leq B \cdot t^{n-1}$ régions de la forme $x + P$ ($x \in P$), ce qui veut dire que $R(t) \leq B \cdot t^{n-1}$. Cela prouve notre théorème. \neq

Théorème (1.11)

Soit le Γ du Lemme (1.5). Alors Γ est borné et $\partial \Gamma$ est $(n-1)$ -Lipschitz paramétrisable.

Preuve

Montrons tout d'abord que Γ est borné. Soit $x = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \simeq \mathbb{R}^n$. La condition ii) de la définition de Γ se traduit en $x \in \mathbb{R}^{*r} \times \mathbb{C}^{*s}$ et $\sum \log |x_i| + 2 \sum \log |y_i| \leq 0$. Cela implique que $c_0 \cdot n \leq 0$ (car la somme des coefficients d'un vecteur est linéaire, les sommes des coefficients des e_i est nulle pour $i = 1, \dots, r+s-1$ et que celle des coefficients de e_0 vaut n); ce qui est équivalent à $c_0 \leq 0$. Ainsi, Γ est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^{*r} \times \mathbb{C}^{*s}$ tels que les r_0 premières composantes de x sont positives, c'est la condition (i) et $l_0(x) = c_0 e_0 + \sum_{i=1}^{r+s-1} c_i e_i$ avec $0 \leq c_i < 1$ et $c_0 \leq 0$, c'est la condition qu'on appellera (ii)'. On en déduit que les composantes (dans la base canonique de \mathbb{R}^{r+s}) de $l_0(x)$ sont bornés supérieurement et par conséquent aussi les $|x_i|$ et les $|y_i|$ aussi (à cause des logarithmes); c'est-à-dire que Γ est borné.

Montrons maintenant que $\partial \Gamma$ est $(n-1)$ -Lipschitz paramétrisable. Pour cela, il suffit de le montrer pour Γ_0 qui est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^{*r} \times \mathbb{C}^{*s}$ tels que les r premières composantes de x sont positives et qui satisfait (ii)'; en effet, si $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$ satisfait la condition (ii)', alors $(x_1, \dots, -x_i, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$ le satisfait aussi, donc Γ est symétrique par rapport aux hyperplans

$x_i = 0$, $i = r_0 + 1, \dots, r$ et si d'un côté, le bord est $(n-1)$ -Lipschitz paramétrisable, l'autre côté le sera aussi. On a en outre que $\text{vol}(\Gamma) = 2^{r-r_0} \cdot \text{vol}(\Gamma_0)$. Ecrivons $e_i = (e_i^{(1)}, \dots, e_i^{(r+s)})$, $i = 1, \dots, r+s-1$. Soit $x = (x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) \in \Gamma_0$. Les conditions pour x et $l_0(x)$ sont alors que $x_1, \dots, x_r > 0$, et $\log(x_i) = \sum_{k=1}^{r+s-1} c_k \cdot e_k^{(i)} + c_0$, $1 \leq i \leq r$ et $2 \log |y_j| = \sum_{k=1}^{r+s-1} c_k \cdot e_k^{(r+j)} + 2c_0$, $1 \leq j \leq s$ avec $c_k \in [0; 1[$, $k = 1, \dots, r+s-1$ et $c_0 \in]-\infty; 0]$. Remplaçons e^{c_0} par c_{r+s} , on a alors $c_{r+s} \in]0; 1]$. Posons aussi, pour $1 \leq j \leq s$, $y_j = \rho_j e^{i\theta_j}$ ($\rho_j > 0$ et $0 \leq \theta_j < 2\pi$). On peut alors décrire Γ_0 comme étant l'ensemble des $(x_1, \dots, x_r, \rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_s e^{i\theta_s}) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$ tels que

$$\left. \begin{aligned} x_i &= c_{r+s} \cdot e^{\sum_{k=1}^{r+s-1} c_k e_k^{(i)}} & 1 \leq i \leq r \\ \rho_j &= c_{r+s} \cdot e^{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r+s-1} c_k e_k^{(r+j)}} & 1 \leq j \leq s \\ \theta_j &= 2\pi c_{r+s+j} & 1 \leq j \leq s \end{aligned} \right\} (*)$$

avec $c_{r+s} \in]0; 1]$ et $c_k \in [0; 1[$ pour toutes les valeurs de $k \neq r+s$ ($1 \leq k \leq n$). Soit

$$\begin{aligned} f : [0, 1]^n &\longrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \\ (c_1, \dots, c_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_r, \rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_s e^{i\theta_s}) \end{aligned}$$

donnée par les relations (*). Il est clair que f est continue et $f([0; 1]^{r+s-1} \times]0; 1] \times [0; 1]^{s-1}) = \Gamma_0$ et donc $f([0; 1]^n) = \bar{\Gamma}_0$ cela vient du fait que image de tout compact est un compact et l'image de l'adhérence est inclu dans l'adhérence de l'image. On a aussi $f(]0; 1]^n) \subset \Gamma_0$. La différence entre le cube $[0; 1]^n$ et son intérieur est $2n$ cubes fermé de dimension $n-1$; de plus f est lipschitzienne car partout continûment dérivable. Il suffit donc pour conclure de montrer que $f(]0; 1]^n) \subset \overset{\circ}{\Gamma}_0$, ou encore que $f :]0; 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application ouverte (i.e. l'image d'un ouvert est un ouvert). Et pour cela, on observe que f est la composée des quatre applications suivantes, manifestement ouvertes : $]0; 1]^n \xrightarrow{f_1} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_2} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f_3} \mathbb{R}^r \times]0; \infty[^s \times \mathbb{R}^s \xrightarrow{f_4} \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s$. définies de la façon suivante :

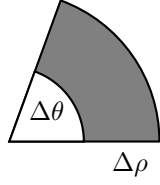
- a) $f_1((t_1, \dots, t_n)) = (t_1, \dots, t_{r+s-1}, \log(t_{r+s}), t_{r+s+1}, \dots, t_n)$.
- b) f_2 est l'application linéaire $(u_1, \dots, u_n) \mapsto (u_1, \dots, u_n) \cdot M$, où

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \hline & \overbrace{\hspace{1.5cm}}^{r+s} & & & & \\ & e_1 & & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \hline & e_{r+s-1} & & \vdots & & \vdots \\ & e_0 & & 0 & \cdots & 0 \\ \hline & \underbrace{0_{s \times r+s}}_{0_{s \times r+s}} & & \underbrace{I_s}_{I_s} & & \end{array} \right)$$

L'application f_2 est ouverte, car M est inversible.

- c) Pour f_3 , on applique $x \mapsto e^x$ aux r premières coordonnées, $x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}$ aux s suivantes et on multiplie les s dernières par 2π .
- d) $f_4((x_1, \dots, x_r, \rho_1, \dots, \rho_s, \theta_1, \dots, \theta_s)) = (x_1, \dots, x_r, \rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_s e^{i\theta_s})$, l'application $(\rho, \theta) \mapsto \rho e^{i\theta}$ étant une application ouverte de $]0; \infty[\times \mathbb{R}$ dans \mathbb{C} , car l'image d'un cube ouvert $(\Delta\rho, \Delta\theta)$ donne

le domaine suivant :



Preuve du Théorème (1.1)

On a :

$$\begin{aligned}
 j(x, \mathfrak{K}) &\stackrel{\text{Lemme (1.5)}}{=} \frac{1}{w_{\mathfrak{m}}} \cdot M(x^{\frac{1}{n}} \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{b})^{\frac{1}{n}}) \\
 &\stackrel{\text{Thm. (1.10) et (1.11)}}{=} \frac{1}{w_{\mathfrak{m}}} \cdot \left(\frac{\text{Vol}(\Gamma)}{\text{Vol}(\Lambda_0)} \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{b}) \cdot x + O((x^{\frac{1}{n}} \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{b})^{\frac{1}{n}})^{n-1}) \right) \\
 &= \rho_{\mathfrak{m}} \cdot x + O(x^{1-\frac{1}{n}})
 \end{aligned}$$

où $\rho_{\mathfrak{m}} = \frac{\text{Vol}(\Gamma)}{w_{\mathfrak{m}}} \cdot \frac{\mathbb{N}(\mathfrak{b})}{\text{Vol}(\Lambda_0)}$ ne dépend que de \mathfrak{m} . En effet, Γ et $w_{\mathfrak{m}}$ ne dépendent que de \mathfrak{m} de manière évidente; l'idéal \mathfrak{b} est dans la classe \mathfrak{K}^{-1} et dépend bien sûr de \mathfrak{K} , mais $\text{Vol}(\Lambda_0) = \text{Vol}(\Lambda) = \text{Vol}(v(\mathfrak{b}\mathfrak{m}_0)) = \mathbb{N}(\mathfrak{b}) \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{m}_0) \cdot \text{Vol}(v(O_K))$. Ainsi, $\frac{\mathbb{N}(\mathfrak{b})}{\text{Vol}(\Lambda_0)}$ ne dépend aussi que de \mathfrak{m} . #

Chapitre 2 : Séries de Dirichlet et première inégalité du corps de classe

Dans ce chapitre, nous ferons un peu d'analyse complexe pour préparer le chapitre suivant où nous démontrerons le théorème de Čebotarev. Le but est aussi de prouver la première inégalité du corps de classe (Théorème (2.20))

Définition (2.1)

Tout le monde connaît l'exponentielle complexe $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ qui converge dans tout le plan complexe. Si $t > 0$ est un nombre réel strictement positif, on pose $t^s = e^{s \log(t)}$ où $\log(t)$ est le logarithme usuel des nombres réels. Une *série de Dirichlet* est une fonction complexe du type

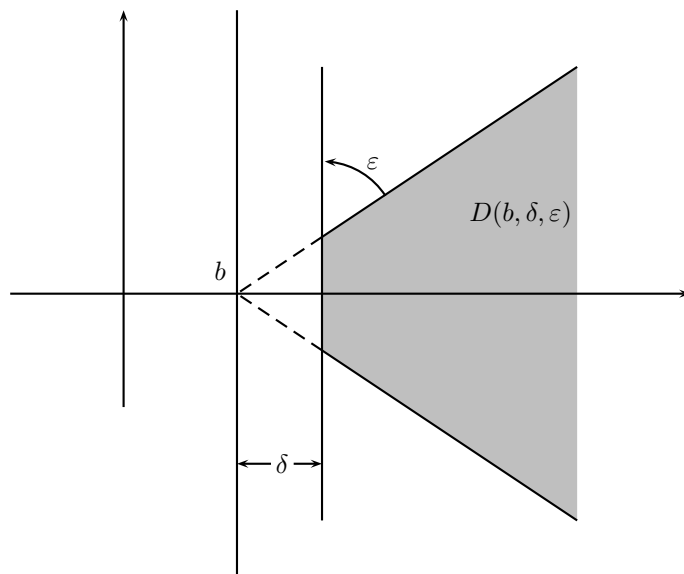
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

avec $a(n), s \in \mathbb{C}$.

Soit $b \geq 0$, $\delta > 0$ et $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. On définit aussi

$$D(b, \delta, \varepsilon) = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) \geq b + \delta \text{ et } |\arg(s - b)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon\}.$$

Graphiquement, cela donne ceci :



Théorème (2.2)

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ une série de Dirichlet. Posons $s(n) = \sum_{i=1}^n a(i)$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $b \geq 0$ tels que $|s(n)| \leq a \cdot n^b$ pour tout $n \geq 1$. Alors la série converge uniformément dans $D(b, \delta, \varepsilon)$ pour tout δ, ε tel que $\delta > 0$ et $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Cela implique que cette série définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > b$ (cf. [Con, Th. 2.1, p.147]).

Preuve

On posera $\sigma = \Re(s)$. Donc $|t^s| = t^\sigma$ si $t > 0$. On va utiliser le critère de convergence de Cauchy. Soit donc u et v des entiers tels que $v \geq u + 1 > 2$; et $s \in D(b, \delta, \varepsilon)$. On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=u}^v \frac{a(n)}{n^s} \right| &= \left| \sum_{n=u}^v \frac{s(n) - s(n-1)}{n^s} \right| = \left| \sum_{n=u}^v \frac{s(n)}{n^s} - \sum_{n=u-1}^{v-1} \frac{s(n)}{(n+1)^s} \right| \\ &= \left| \frac{s(v)}{v^s} - \frac{s(u-1)}{u^s} + \sum_{n=u}^{v-1} s(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \right| \\ &\leq \left| \frac{s(v)}{v^s} \right| + \left| \frac{s(u-1)}{u^s} \right| + \sum_{n=u}^{v-1} |s(n)| \cdot \left| \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right| \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} = s \cdot \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{s+1}}$, (on se souvient que $\int (g + ih) dt = \int g dt + i \int h dt$ si le domaine d'intégration est réel). Ainsi,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=u}^v \frac{a(n)}{n^s} \right| &\leq \frac{a}{v^{\sigma-b}} + \frac{a}{u^{\sigma-b}} + \sum_{n=u}^{v-1} |s| \cdot a \cdot n^b \cdot \left| \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{s+1}} \right| \\ &\leq \frac{2a}{u^{\sigma-b}} + |s| \cdot a \cdot \sum_{n=u}^{v-1} \left| \int_n^{n+1} \frac{t^b \cdot dt}{t^{s+1}} \right| \\ &\leq \frac{2a}{u^{\sigma-b}} + |s| \cdot a \cdot \int_u^v \frac{dt}{t^{\sigma+1-b}} \\ &\leq \frac{2a}{u^{\sigma-b}} + |s| \cdot a \cdot \int_u^\infty \frac{dt}{t^{\sigma+1-b}} = \frac{2a}{u^{\sigma-b}} + \frac{|s| \cdot a}{(\sigma-b)u^{\sigma-b}}. \end{aligned}$$

Or, puisque s est dans D , on a $\frac{|s|}{\sigma-b} \leq \frac{|s-b|+b}{\sigma-b} \leq \frac{1}{\cos(\theta)} + \frac{b}{\delta}$, où $\theta = \arg(s-b)$. Puisque $|\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, on voit facilement que $\frac{1}{\cos(\theta)} \leq M =: \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}$. Ainsi,

$$\left| \sum_{n=u}^v \frac{a(n)}{n^s} \right| \leq \frac{2a + aM + \frac{ab}{\delta}}{u^{\sigma-b}} < \frac{2a + aM + \frac{ab}{\delta}}{u^\delta} \xrightarrow{\text{uniformément}} 0 \text{ lorsque } u \rightarrow \infty.$$

##

Théorème (2.3)

La fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ pour $\Re(s) > 1$ se prolonge en une fonction méromorphe, encore notée $\zeta(s)$ sur le demi-plan $\Re(s) > 0$. Il y a un seul pôle en $s = 1$ qui est simple et de résidu 1.

preuve

En vertu du théorème précédent (pour $s(n) = n$, et $a = b = 1$), on trouve que $\zeta(s)$ converge dans le demi-plan $\Re(s) > 1$ et y définit une fonction holomorphe. Considérons la série $\zeta_2(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$. On voit que $|s(n)| \leq 1$. Par le théorème précédent, avec $a = 1$ et $b = 0$, on a que $\zeta_2(s)$ est holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 0$. Lorsque $\Re(s) > 1$, la convergence est absolue. Dans ce domaine, on trouve

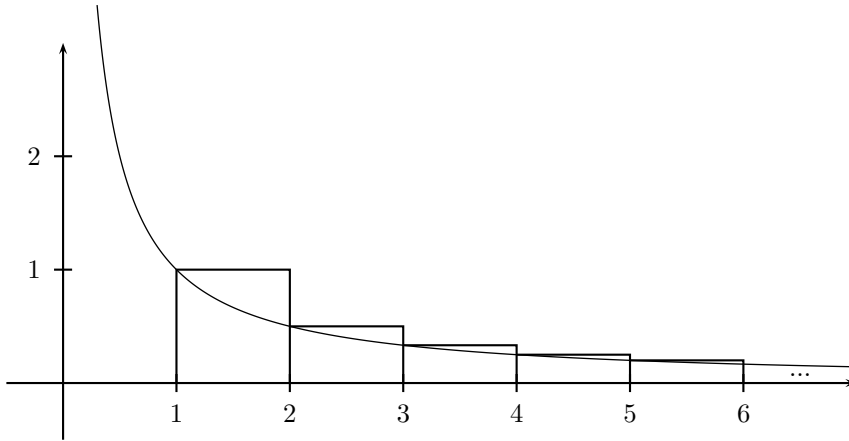
$$\begin{aligned} \zeta_2(s) &= \frac{1}{1^s} - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + \cdots = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} - \frac{2}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{2}{6^s} + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \cdots \right) - 2 \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \cdots \right) = \zeta(s) - \frac{2}{2^s} \cdot \zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}} \right) \cdot \zeta(s), \end{aligned}$$

ainsi $\zeta(s) = \frac{\zeta_2(s)}{(1-\frac{1}{2^{s-1}})}$ lorsque $\Re(s) > 1$. Mais par ce qui précède, on a que la fonction $\frac{\zeta_2(s)}{(1-\frac{1}{2^{s-1}})}$ est méromorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 0$ dont les pôles (s'il y en a) sont parmi les zéros de $(1 - \frac{1}{2^{s-1}})$, donc de la forme $1 + \frac{2k\pi}{\log(2)} \cdot i$, $k \in \mathbb{Z}$. On considère ensuite $\zeta_3(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} - \frac{2}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{2}{6^s} + \dots$. Si cette définition ne vous convient pas, vous pouvez poser $a(n) = 1 - \sum_{j=0}^2 \zeta^{n \cdot j}$, avec $\zeta = \zeta_3 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\zeta_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$. Evidemment, il y aura toujours collusion de notation entre les ζ_n qui sont les racines de l'unité et la fonction ζ de Riemann, mais le contexte permettra toujours de comprendre de quoi on parle. Le théorème précédent s'applique à nouveau et donc, la fonction $\zeta_3(s)$ est une fonction holomorphe sur $\Re(s) > 0$; et lorsque $\Re(s) > 1$, on a

$$\zeta_3(s) = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{3}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} - \frac{3}{6^s} + \dots = \zeta(s) - \frac{3}{3^s} \zeta(s) = (1 - \frac{1}{3^{s-1}}) \zeta(s).$$

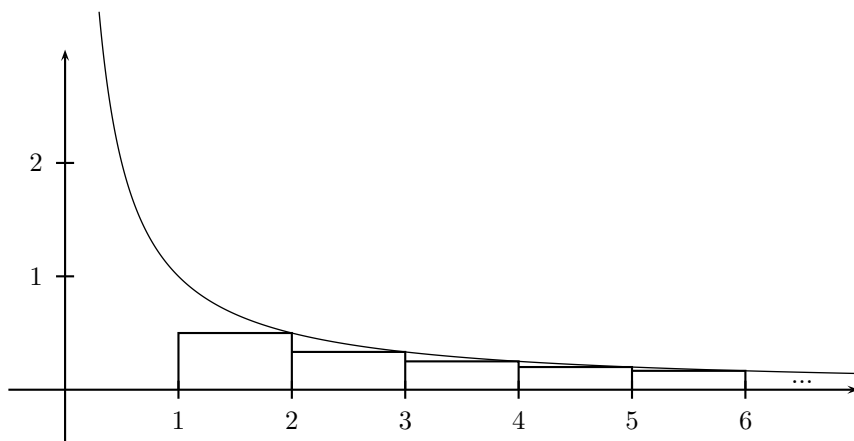
Donc $\frac{\zeta_3(s)}{(1-\frac{1}{3^{s-1}})}$ est un prolongement méromorphe de ζ sur $\Re(s) > 0$. Donc les pôles sont parmi les nombres $1 + \frac{2l\pi}{\log(3)} \cdot i$, $l \in \mathbb{Z}$. Par unicité du prolongement analytique (cf. [Con, Cor. 3.8, p. 70]) on a $\frac{\zeta_2(s)}{(1-\frac{1}{3^{s-1}})} = \frac{\zeta_3(s)}{(1-\frac{1}{3^{s-1}})}$ en dehors de leurs pôles. De plus, puisque ces fonctions sont définies sur des disques entourant ces pôles, si s est un pôle de l'une de ces fonctions, il doit être aussi un pôle de l'autre. Donc, $s = 1 + \frac{2k\pi}{\log(2)} \cdot i = 1 + \frac{2l\pi}{\log(3)} \cdot i$ pour certains k et $l \in \mathbb{Z}$; donc $\frac{k}{\log(2)} = \frac{l}{\log(3)}$, ou encore $2^l = 3^k$; donc $k = l = 0$. On en déduit que le seul pôle éventuel est $s = 1$; et c'est bien un pôle car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \rightarrow \infty$ si $\sigma \rightarrow 1$ par valeurs > 1 . Ce pôle est simple, car les zéros de $(1 - \frac{1}{2^{s-1}})$ sont simples (la dérivée qui vaut $\frac{\log(2)}{2^{s-1}}$ ne s'annule pas en $s = 1$).

Calculons le résidu en $s = 1$. On veut donc calculer $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s)$. Pour ce calcul, il suffit de prendre des s réels > 1 . On considère le graphe de $y = x^{-s}$.



La somme de aires des rectangles donne évidemment $\zeta(s)$ et on voit que $\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} \leq \zeta(s)$. Cet

autre dessin



montre que $\zeta(s) - 1 \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}$. On en déduit que

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{s}{s-1},$$

ainsi, $1 \leq (s-1)\zeta(s) \leq s$ et donc $\lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) = 1$. #

Rappel

Soit K un corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module. Alors il existe une constante $\rho_{\mathfrak{m}} > 0$ telle que si \mathfrak{K} est une classe de $I(\mathfrak{m})$ modulo $P_{\mathfrak{m}}$, et si $j(x, \mathfrak{K})$ est le nombre d'idéaux $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}$ tel que $N(\mathfrak{a}) \geq x$. Alors

$$j(x, \mathfrak{K}) = \rho_{\mathfrak{m}} \cdot x + O(x^{1-\frac{1}{d}})$$

où $d = [K : \mathbb{Q}]$.

C'est le Théorème (1.1) qui était l'objet du Chapitre 1.

Définition (2.4)

Soit K un corps de nombres, \mathfrak{m} un K -module et \mathfrak{K} une classe de $I(\mathfrak{m})$ modulo $P_{\mathfrak{m}}$. On définit

$$\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K}) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s}.$$

Evidemment, cette définition n'a de sens que si la convergence de cette série est absolue. C'est ce que nous allons voir incessamment.

Théorème (2.5)

La série $\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K})$ converge absolument sur le demi-plan $\Re(s) > 1$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\Re(s) > 1 - \frac{1}{d}$ ($d = [K : \mathbb{Q}]$) avec un seul pôle en $s = 1$; ce pôle est simple de résidu $\rho_{\mathfrak{m}}$.

Preuve

Considérons la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, avec $a(n)$, le nombre d'idéaux \mathfrak{a} dans \mathfrak{K} tels que $\mathbb{N}(\mathfrak{a}) = n$. Dans ce cas, $s(n) = \sum_{i=1}^n a(i) = j(n, \mathfrak{K})$. Par le Théorème (1.1), $\frac{s(n)}{n}$ est borné, pour $n \geq 1$. Donc il existe $A > 0$ tel que $|s(n)| = s(n) \leq A \cdot n$. Le Théorème (2.2) s'applique et dit que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ définit une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 1$. Clairement, la convergence dans ce demi-plan est absolue, donc l'ordre des termes n'importe pas et cela justifie qu'on écrive simplement $\sum_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{a})^s}$.

Considérons maintenant la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$, avec $b(n) = a(n) - \rho_{\mathfrak{m}}$ (le $a(n)$ étant celui de tout à l'heure). Pour cette nouvelle série, on a $s(n) = \sum_{i=1}^n b(i) = j(n, \mathfrak{K}) - \rho_{\mathfrak{m}} \cdot n$. Par le Théorème (1.1), il existe $B > 0$ tel que $s(n) \leq B \cdot n^{1-\frac{1}{d}}$. A nouveau par le Théorème (2.2), la série définit une fonction holomorphe (notons-la f) sur le demi-plan $\Re(s) > 1 - \frac{1}{d}$. Lorsque $\Re(s) > 1$, on voit que $f(s) + \rho_{\mathfrak{m}} \cdot \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} = \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K})$. Donc, en vertu du Théorème (2.3), $\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K})$ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\Re(s) > 1 - \frac{1}{d}$, avec un seul pôle en $s = 1$ qui est simple et de résidu $\rho_{\mathfrak{m}}$. \neq

Définitions (2.6)

- a) Soit $G = (G, *, 1)$ un groupe abélien fini. On appelle *caractère* de G tout homomorphisme $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}^*$. On note $\mathbf{1}$ le caractère de G qui envoie tout élément de G sur 1. L'ensemble \widehat{G} des caractères est lui-même un groupe isomorphe à G : $\chi_1 \chi_2(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g)$. Remarquons que l'on a pour tout $\chi \in \widehat{G}$:

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \neq \mathbf{1} \\ |G| & \text{si } \chi = \mathbf{1}. \end{cases}$$

En effet, c'est clair si $\chi = \mathbf{1}$. Supposons que $\chi \neq \mathbf{1}$, donc il existe $h \in G$ tel que $\chi(h) \neq 1$. L'application $g \mapsto hg$ est clairement une bijection de G dans lui-même. Donc,

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(hg) = \chi(h) \cdot \sum_{g \in G} \chi(g).$$

Si $\sum_{g \in G} \chi(g) \neq 0$, on en déduirait que $\chi(h) = 1$, ce qui est contradiction.

De plus, puisque G et \widehat{G} sont isomorphes, on a aussi pour tout $g \in G$

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \neq 1 \\ |G| & \text{si } g = 1. \end{cases}$$

- b) Soit K un corps de nombres, \mathfrak{m} un K -module et χ un caractère de $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$. On définit

$$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{a} \in I(\mathfrak{m})} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathbb{N}(\mathfrak{a})^s},$$

où $\chi(\mathfrak{a}) := \chi(\mathfrak{a} \bmod P_{\mathfrak{m}})$. Comme tout à l'heure, cette série n'est définie que si la convergence est absolue. C'est évidemment ce qu'on va voir !

Théorème (2.7)

La série $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ converge absolument sur le demi-plan $\Re(s) > 1$ et admet un prolongement méromorphe sur $\Re(s) > 1 - \frac{1}{d}$. Si $\chi \neq \mathbf{1}$ (le caractère unité), il n'y a pas de pôle (donc le prolongement est holomorphe). Si $\chi = \mathbf{1}$, il y a un pôle unique, simple en $s = 1$ et de résidu $h_{\mathfrak{m}} \rho_{\mathfrak{m}}$, (souvenons nous de $h_{\mathfrak{m}}$, c'est le cardinal du groupe $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$).

Preuve

La convergence est absolue sur $\Re(s) > 1$, car $\left| \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathbb{N}(\mathfrak{a})^s} \right| = \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{a})^\sigma}$, où $\sigma = \Re(s)$ et parce que $\sum_{\mathfrak{a} \in I(\mathfrak{m})} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{a})^\sigma} = \sum_{\mathfrak{R} \in I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}} \zeta_{\mathfrak{m}}(\sigma, \mathfrak{R})$; cette somme est finie, car $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$ est fini de cardinal $h_{\mathfrak{m}}$ (cf. Théorème (0.12)). Toujours si $\Re(s) > 1$, en réarrangeant les termes, on obtient

$$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{R} \in I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{R}) \cdot \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{R}).$$

On conclut en vertu du Théorème (2.5) et en se souvenant que

$$\sum_{\mathfrak{R} \in I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}} \chi(\mathfrak{R}) = \begin{cases} h_{\mathfrak{m}} & \text{si } \chi = \mathbf{1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

#

Définitions (2.8)

- a) On notera $\zeta_{\mathfrak{m}}(s)$ au lieu de $L_{\mathfrak{m}}(s, \mathbf{1}) = \sum_{\mathfrak{R} \in I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}} \zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{R})$. On l'appellera la *fonction zêta de \mathfrak{m}* .
Et si $\mathfrak{m} = \mathbf{1} = O_K \cdot \emptyset$, on note cette fonction $\zeta_K(s)$ qui est la *fonction zêta de K* .
- b) Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $\text{Log}(z) = \log|z| + i \arg(z)$ où $-\pi < \arg(z) \leq \pi$, où $\log(\cdot)$ est la fonction logarithme usuelle sur les nombres réels. On appelle $\text{Log}(\cdot)$ la *branche principale du logarithme*. On peut voir que $e^{\text{Log}(z)} = z$, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Si $w \in \mathbb{C}$ est tel que $e^w = z$, alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $w = \text{Log}(z) + 2k\pi i$. De plus, si $|z| < 1$, alors $-\text{Log}(1-z) = \text{Log}((1-z)^{-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.
- c) Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de nombres complexes non nuls, nous dirons que $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* si $\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$ existe et est **non nulle**. Nous utiliserons le résultat suivant : si la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \text{Log}(a_n)$ converge absolument, alors $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Nous dirons dans ce cas que le produit $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolument*.

Théorème (2.9)

Soit K , \mathfrak{m} et χ comme avant. Alors si $\Re(s) > 1$, on a la représentation

$$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1},$$

le produit convergeant absolument. Cela prouve que $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) \neq 0$.

Posons $\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \text{Log} \left(\left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1} \right)$. Alors $\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ est holomorphe sur $\Re(s) > 1$ et il existe $g_{\chi}(s)$ une fonction holomorphe sur le demi-plan $\Re(s) > 1$, prolongeable holomorphiquement au voisinage de 1 telle que

$$\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} + g_{\chi}(s),$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(s) > 1$.

Voir le lemme suivant pour une explication de l'écriture $\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$. Remarquons encore qu'ici (et pour ce chapitre), l'écriture $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$ ne concerne que les places finies.

Preuve

Tout d'abord, la série $\sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s}$ converge absolument sur $\Re(s) > 1$, car c'est une partie de $\sum_{\mathfrak{a} \in I(\mathfrak{m})} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathbb{N}(\mathfrak{a})^s}$, qui converge dans ce domaine en vertu du Théorème (2.7). D'autre part, $\sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p}^j)}{j \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{sj}}$ converge absolument si $\sigma := \Re(s) > \frac{1}{2}$, car

$$\begin{aligned} \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{sj}} &\leq \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^{2\sigma}} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^{sj}} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^{2\sigma}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma} \cdot \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma - 1} \leq \frac{1}{2} \cdot \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma} \cdot \frac{4}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma}. \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient de $4(\mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma - 1) = \mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma + 3\mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma - 4 \geq \mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma + 3\sqrt{2} - 4 \geq \mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma$. On a donc prouvé que

$$\sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{sj}} \leq 2 \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^{2\sigma}} \leq 2\zeta_{\mathfrak{m}}(2\sigma).$$

Et donc $g_\chi(s) := \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p}^j)}{j \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{sj}}$ est une fonction holomorphe sur $\Re(s) > \frac{1}{2}$, car elle converge absolument et uniformément sur tout compact de ce domaine. Maintenant, en appliquant la série de la branche principale du logarithme, avec $z = \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s}$ (qui est de module < 1 si $\Re(s) > 1$), on trouve que

$$\sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} + g_\chi(s) = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p}^j)}{j \cdot \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{sj}} = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \text{Log} \left(\left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1} \right) = \mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$$

qui converge absolument et est holomorphe si $\Re(s) > 1$. En choisissant une numérotation quelconque des $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$ (c'est possible de le faire maintenant qu'on a la convergence absolue), on a

$$e^{\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{i=1}^n \text{Log} \left(\left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p}_i)}{\mathbb{N}(\mathfrak{p}_i)^s} \right)^{-1} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p}_i)}{\mathbb{N}(\mathfrak{p}_i)^s} \right)^{-1} = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1}.$$

Il reste à vérifier que le dernier produit est égal à $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$. Il suffit de montrer que

$$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m} \\ \mathbb{N}(\mathfrak{p}) \leq N}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1}.$$

Or,

$$\prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m} \\ \mathbb{N}(\mathfrak{p}) \leq N}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1} = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m} \\ \mathbb{N}(\mathfrak{p}) \leq N}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p})^j}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^{sj}} \right) = \sum_{\mathfrak{a} \in S_N} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{\mathbb{N}(\mathfrak{a})^s},$$

où S_N est l'ensemble des idéaux entiers, premiers à \mathfrak{m} dont les diviseurs premiers sont de norme inférieure ou égale à N ; la dernière égalité venant de la convergence absolue de la somme $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p})^j}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^{sj}}$ et de la multiplicativité de χ et de la norme. Ainsi,

$$\left| \prod_{\substack{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m} \\ \mathbb{N}(\mathfrak{p}) \leq N}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \right)^{-1} - L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) \right| \leq \sum_{\substack{\mathbb{N}(\mathfrak{a}) > N \\ \mathfrak{a} \in I(\mathfrak{m})}} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{a})^{\Re(s)}} \longrightarrow 0 \text{ si } N \rightarrow \infty,$$

en vertu du Théorème (2.7). #

Lemme (2.10)

Si $X \subset \mathbb{C}$ est un ouvert connexe et simplement connexe et si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est une fonction holomorphe et non nulle, alors il existe, sur X , un logarithme de cette fonction, c'est-à-dire une fonction holomorphe \tilde{f} telle que $e^{\tilde{f}(x)} = f(x)$. De plus, si on fixe une valeur de \tilde{f} en un point de X , alors cette fonction est unique. Remarquons que si $f(x) = f(y)$, cela n'implique pas forcément que $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y)$. Lors du théorème précédent, la fonction $\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ était un logarithme de la fonction $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$, voilà pourquoi, nous avons écrit $\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ plutôt que $\mathbf{log}(L_{\mathfrak{m}}(s, \chi))$.

Preuve

Cf. [Ru, Thm 13.18, p. 263]

Corollaire (2.11)

Soit K, \mathfrak{m} comme avant. Il existe $h(s)$ une fonction holomorphe dans un voisinage V de $s = 1$ et $g(s)$ une fonction holomorphe sur $\Re(s) > \frac{1}{2}$ telles que si s est dans V et que $\Re(s) > 1$, alors on a :

$$\mathbf{log} \zeta_{\mathfrak{m}}(s) = -\mathrm{Log}(s-1) + h(s) = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} + g(s) \quad (1)$$

Preuve

Soit χ un caractère de $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$. Si $\Re(s) > 1$, alors il est clair que $\mathrm{Log}(s-1) + \mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ est un logarithme de $(s-1) \cdot L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$. Si on prend $\chi = \mathbf{1}$, alors, vu les définitions qu'on a faites et en vertu du Théorème (2.7), la fonction $(s-1) \cdot \zeta_{\mathfrak{m}}(s)$ est définie, holomorphe et non nulle sur un voisinage de $s = 1$. Donc, cette fonction possède un logarithme sur ce voisinage, en vertu du lemme précédent. Notons $h(s)$ le logarithme qui coïncide avec $\mathrm{Log}(s-1) + \mathbf{log} \zeta_{\mathfrak{m}}(s)$ sur $\Re(s) > 1$. On en déduit la première égalité. La seconde découle du Théorème (2.9). #

Définitions (2.12)

Soient f_1 et f_2 des fonctions complexes définies sur $\Re(s) > 1$. On écrira $f_1 \sim f_2$ si $g(s) := f_1(s) - f_2(s)$ est une fonction holomorphe sur $\Re(s) > 1$ et prolongeable en une fonction toujours holomorphe au voisinage de $s = 1$.

Soit K un corps de nombres et S un ensemble d'idéaux premiers de O_K . On dira que S est de *densité de Dirichlet* δ si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- 1)
$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in S} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s}}{-\mathrm{Log}(s-1)} = \delta$$
- 2)
$$\sum_{\mathfrak{p} \in S} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \sim -\delta \cdot \mathrm{Log}(s-1)$$

Il est clair que la condition 2) implique la condition 1). Si S satisfait la condition 2), on dit de plus que S est *régulier*. Le Corollaire (2.11) implique que l'ensemble des idéaux premiers de $I(\mathfrak{m})$ est régulier de densité 1. Il est clair que si S est fini, sa densité est nulle et que si S et S' sont disjoints de densité δ et δ' , alors la densité de $S \cup S'$ vaut $\delta + \delta'$. Cela implique, puisque l'ensemble de idéaux premiers $I(\mathfrak{m})$

contient tous les idéaux premiers de K sauf un nombre fini, que si S est de densité δ , on a $0 \leq \delta \leq 1$ et que l'ensemble des idéaux premiers de K est régulier de densité 1. On montre aussi facilement que si $S \subset S'$ sont de densité δ et δ' , alors $\delta \leq \delta'$.

Lemme (2.13)

Soit K un corps de nombres. Alors l'ensemble des idéaux premiers \mathfrak{p} tels que $f(\mathfrak{p}/\mathbb{Q}) > 1$ est un ensemble régulier de densité de Dirichlet nulle.

Preuve

Notons A l'ensemble de ces idéaux. On va montrer que $\sum_{\mathfrak{p} \in A} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s}$ est holomorphe au voisinage de $s = 1$. Pour tout $\mathfrak{p} \in A$, la fonction $s \mapsto \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s}$ est clairement holomorphe au voisinage de $s = 1$. D'autre part, puisque $\mathfrak{p} \in A$, il existe $p \in \mathbb{P}_0(\mathbb{Q})$ tel que $\mathbb{N}(\mathfrak{p}) = p^{f(\mathfrak{p}, \mathbb{Q})} \geq p^2$. De plus, il y a au plus $[K : \mathbb{Q}]$ nombres premiers au-dessous de \mathfrak{p} . Ainsi

$$\sum_{\mathfrak{p} \in A} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^\sigma} \leq [K : \mathbb{Q}] \cdot \sum_{p \in \mathbb{P}_0(\mathbb{Q})} \frac{1}{p^{2\sigma}} \leq [K : \mathbb{Q}] \cdot \zeta(2\sigma), \text{ où } \sigma = \Re(s) > \frac{1}{2}.$$

Ce qui montre, en vertu du Théorème (2.3), que $\sum_{\mathfrak{p} \in A} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s}$ converge absolument et uniformément sur tout compact du demi-plan $\Re(s) > \frac{1}{2}$, donc est une fonction holomorphe au voisinage de 1, cela prouve le lemme. #

Lemme (2.14)

Soit L/K une extension de corps de nombres. Alors l'ensemble $S = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ se décompose complètement dans } L\}$ est régulier de densité $[E : K]^{-1}$ où E est la clôture galoisienne de L/K , c'est-à-dire la plus petite extension E/K , galoisienne, contenant L .

Preuve

Si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ se décompose complètement dans L , alors, en vertu du lemme “décomposition-ramification” du Chapitre 0, page 3, il se décompose complètement dans E . On a donc $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1$ pour tout idéal premier \mathfrak{P} de E au-dessus de \mathfrak{p} (il y en a donc $[E : K]$ et $\mathbb{N}(\mathfrak{p}) = \mathbb{N}(\mathfrak{P})$). On trouve alors :

$$[E : K] \cdot \sum_{\mathfrak{p} \in S} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} = \sum_{\mathfrak{P} \in S_1} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{P})^s},$$

où $S_1 = \{\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(E) \mid f(\mathfrak{P}/\mathfrak{P} \cap K) = 1 \text{ et } \mathfrak{P} \text{ est non ramifié sur } K\}$. L'ensemble S_1 est régulier de densité de Dirichlet 1, car pour obtenir S_1 , on enlève à tous les idéaux premiers de E un nombre fini d'idéaux (ceux qui se ramifient sur K) et un sous-ensemble de ceux qui sont de degré sur \mathbb{Q} supérieur à 1 qui est de densité 0 (cf. Lemme (2.13) et utilisant la relation $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{P} \cap \mathbb{Q}) = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{P} \cap K) \cdot f(\mathfrak{P} \cap K/\mathfrak{P} \cap \mathbb{Q})$). Cela prouve que S est de densité $\frac{1}{[E:K]}$. #

Corollaire (2.15)

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres de groupe de Galois G .

a) Soit $H \subset G$ un sous-groupe normal. Alors l'ensemble

$$S = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ est non ramifié dans } L \text{ et } \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \in H \text{ pour tout } \mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L) \text{ au-dessus de } \mathfrak{p}\}$$

est régulier de densité $\frac{1}{[G:H]} = \frac{|H|}{|G|}$.

b) De plus, si H_1 et H_2 sont des sous-groupes normaux de G , alors l'ensemble

$$S' = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ est non ramifié dans } L \text{ et } \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \in H_1 \cup H_2 \text{ pour tout } \mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L), \mathfrak{P}|\mathfrak{p}\}$$

est régulier de densité $\frac{|H_1 \cup H_2|}{|G|}$. Ce résultat se généralise à un nombre fini de sous-groupes.

Preuve

Pour a), posons F le corps fixe par H . Puisque H est un sous-groupe normal de G , la théorie de Galois nous dit que l'extension F/K est galoisienne de groupe de Galois G/H . Si $\mathfrak{p}_0 \in \mathbb{P}_0(F)$ est un idéal premier au-dessus de \mathfrak{p} , par hypothèse, on a $\text{Frob}(\mathfrak{p}_0/\mathfrak{p}) = \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})|_F = \text{Id}_F$ dans G/H , pour tout idéal $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}(L)$ au-dessus de \mathfrak{p}_0 . Or, on sait que $\text{Frob}(\mathfrak{p}_0/\mathfrak{p})$ engendre $Z(\mathfrak{p}_0/\mathfrak{p})$ qui est de cardinal $f(\mathfrak{p}_0/\mathfrak{p})$. Ainsi, $f(\mathfrak{p}_0/\mathfrak{p}) = 1$, ce qui veut dire que \mathfrak{p} se décompose totalement dans F . En résumé, S est l'ensemble des idéaux premiers de O_K qui se décomposent totalement dans O_F . Le Lemme (2.14) nous apprend alors que S est régulier de densité $\frac{1}{[F:K]} = \frac{1}{[G:H]}$.

Prouvons b). Les sous-groupes H_1 , H_2 et $H_1 \cap H_2$ correspondent à des ensembles S_1 , S_2 et $S_1 \cap S_2$ de densité de Dirichlet respectivement de $\frac{|H_1|}{|G|}$, $\frac{|H_2|}{|G|}$ et $\frac{|H_1 \cap H_2|}{|G|}$. Il est clair que $S' = S_1 \cup S_2$ et que

$$\sum_{\mathfrak{p} \in S'} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} = \sum_{\mathfrak{p} \in S_1} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} + \sum_{\mathfrak{p} \in S_2} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} - \sum_{\mathfrak{p} \in S_1 \cap S_2} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \sim -\frac{|H_1| + |H_2| - |H_1 \cap H_2|}{|G|} \cdot \text{Log}(s-1)$$

Ainsi, S' est régulier de densité de Dirichlet $\frac{|H_1| + |H_2| - |H_1 \cap H_2|}{|G|} = \frac{|H_1 \cup H_2|}{|G|}$. #

Voici maintenant un résultat annoncé depuis longtemps :

Théorème (2.16) (Surjectivité de l'application d'Artin)

Soit L/K une extension abélienne de groupe G et \mathfrak{m} un K -module divisible par toutes les places de K qui ramifient dans L . Alors l'application d'Artin

$$\Phi_{L/K} : I_K(\mathfrak{m}) \longrightarrow G$$

est surjective.

Preuve

Soit $\sigma \in G$. Notons $H = \langle \sigma \rangle$ le sous-groupe engendré par σ . Par le Corollaire (2.15), partie a), l'ensemble $S = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ est non ramifié dans } L \text{ et } \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \in H \text{ pour tout } \mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L) \text{ au-dessus de } \mathfrak{p}\}$ est de densité $\frac{1}{[G:H]}$. Supposons par l'absurde que σ ne soit pas atteint par $\Phi_{L/K}$. Notons $\cup H_i$ la réunion de tous les sous-groupes propres de H . Il est évident que $\cup H_i \subset H$, mais que $\cup H_i \neq H$, car $\sigma \notin \cup H_i$. Donc, par hypothèse absurde, S est inclu dans $S' = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ est non ramifié dans } L \text{ et } \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \in \cup H_i \text{ pour tout } \mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L) \text{ au-dessus de } \mathfrak{p}\}$. Ainsi, on trouve, grâce au Corollaire (2.15), partie b) :

$$\delta(S) \leq \delta(S') = \frac{|\cup H_i|}{|G|} < \frac{|H|}{|G|} = \delta(S),$$

ce qui est une contradiction. #

Voici un autre résultat important qui montre en substance que la connaissance des idéaux premiers qui se décomposent totalement détermine une extension galoisienne.

Théorème (2.17)

Soient L_1/K et L_2/K deux extensions galoisiennes de corps de nombres (plongées dans \mathbb{C}). Posons, pour $i = 1, 2$, $S_i = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ se décompose complètement dans } L_i\}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- a) $L_1 \subset L_2$
- b) $S_2 \subset S_1$
- c) $S_2 \setminus S_1$ est de densité de Dirichlet nulle.

Preuve

a) \implies b) \implies c) est trivial. Prouvons c) \implies a). Posons $S = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ se décompose complètement dans } L_1 L_2\}$. Le Lemme (2.14) nous dit que $\delta(S) = \frac{1}{[L_1 L_2 : K]}$ et $\delta(S_i) = \frac{1}{[L_i : K]}$, pour $i = 1, 2$. Par le Lemme “décomposition-ramification”, page 3, $S = S_1 \cap S_2$, et ainsi S_2 est la réunion disjointe de S et de $S_2 \setminus S_1$. Donc, par hypothèse, $\delta(S_2) = \delta(S)$. Ce qui montre que $[L_1 L_2 : K] = [L_2 : K]$, donc $L_1 L_2 = L_2$, ce qui veut dire que $L_1 \subset L_2$. #

Corollaire (2.18)

Avec les mêmes notations, On a équivalence entre

- a) $L_1 = L_2$
- b) $S_1 = S_2$
- c) $S_1 \triangle S_2$ est de densité de Dirichlet nulle (ici \triangle désigne la différence symétrique).

Preuve

C'est immédiat. #

Théorème (2.19)

Soit K un corps de nombres, \mathfrak{m} un K -module et $I(\mathfrak{m}) \supset H \supset P_{\mathfrak{m}}$, H étant un sous-groupe. Soit $S \subset H \cap \mathbb{P}_0(K)$ ayant une densité de Dirichlet δ . Posons $h = [I(\mathfrak{m}) : H]$. Alors on a

$$\delta \leq \frac{1}{h}.$$

Supposons de plus que $\delta > 0$. Soit χ un caractère de $I(\mathfrak{m})/H$. On note $\widehat{I(\mathfrak{m})/H}$ l'ensemble de ces caractères. Si $\chi \neq \mathbf{1}$, alors on a

$$L_{\mathfrak{m}}(1, \chi) \neq 0,$$

et pour chaque classe \mathfrak{K} de $I(\mathfrak{m})/H$, l'ensemble $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{K}\}$ est régulier, de densité $\frac{1}{h}$.

Remarquons que $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$ n'a été définie que lorsque χ est un caractère de $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$. On associera tout caractère χ de $I(\mathfrak{m})/H$ à $\tilde{\chi} = \chi \circ \varphi$ où φ est l'homomorphisme canonique $I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} \rightarrow I(\mathfrak{m})/H$.

Preuve

Soit $\chi \in \widehat{I(\mathfrak{m})/H}$. En identifiant χ et $\tilde{\chi}$, et grâce au Théorème (2.9), on sait que pour tout s tel que $\Re(s) > 1$, on a :

$$\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = \sum_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} + g_{\chi}(s), \quad (i)$$

avec $g_{\chi}(s)$ une fonction holomorphe au voisinage de $s = 1$. Si $\chi \neq \mathbf{1}$, on note $n(\chi)$ l'ordre du zéro de $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$. Grâce au Théorème (2.7), on sait que $n(\chi) \geq 0$. On a $n(\chi) = 0$ si et seulement si $L_{\mathfrak{m}}(1, \chi) \neq 0$. Ainsi, $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = (s - 1)^{n(\chi)} \cdot f_{\chi}(s)$ où $f_{\chi}(s)$ est une fonction holomorphe sur un voisinage de 1 et $f_{\chi}(1) \neq 0$. En vertu du Lemme (2.10), il existe une fonction logarithme (qu'on notera $\log f_{\chi}$) tel que pour tout s tel que $\Re(s) > 1$, on ait :

$$\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) = n(\chi) \cdot \text{Log}(s - 1) + \log f_{\chi}(s),$$

avec $\log f_{\chi}(s)$ holomorphe sur un voisinage de 1.

Si $\chi = \mathbf{1}$, le Corollaire (2.11) nous dit qu'il existe une fonction $f(s)$ holomorphe au voisinage de 1, telle que pour tout s tel que $\Re(s) > 1$, on ait

$$\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \mathbf{1}) = -\text{Log}(s - 1) + f(s). \quad (ii)$$

Ainsi, en sommant sur tous les χ et en remarquant que $\sum_{\chi \in \widehat{I(\mathfrak{m})/H}} \chi(\mathfrak{p}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathfrak{p} \notin H \\ h & \text{si } \mathfrak{p} \in H \end{cases}$ (voir Définition (2.6)), on a pour tout s tel que $\Re(s) > 1$:

$$h \cdot \sum_{\mathfrak{p} \in H \cap \mathbb{P}_0(K)} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} = \sum_{\chi \in \widehat{I(\mathfrak{m})/H}} \mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) + g_0(s) = -(1 - \sum_{\chi \neq \mathbf{1}} n_{\chi}) \text{Log}(s - 1) + \tilde{g}(s),$$

où $g_0(s)$ et $\tilde{g}(s)$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de $s = 1$ (vous aurez remarqué que g_0 est la somme des $-g_{\chi}$ et \tilde{g} est la somme de g_0 , des $\log(f_{\chi})$ et de f). Par hypothèse, si $s > 1$ est réel, il existe une fonction $h(s) \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow 1$ telle que :

$$\sum_{\mathfrak{p} \in S} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} = -(\delta + h(s)) \cdot \text{Log}(s - 1).$$

Si $s > 1$, on a

$$0 \leq \sum_{\mathfrak{p} \in (H \cap \mathbb{P}_0(K)) \setminus S} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} = - \underbrace{\left(\frac{1}{h} (1 - \sum_{\chi \neq \mathbf{1}} n(\chi)) - \delta - h(s) \right)}_{(*)} \cdot \text{Log}(s - 1) + \tilde{g}(s).$$

Il est clair que $(*)$ doit être positif, car sinon l'inégalité \leq devient fausse pour des $s \rightarrow 1$. On en déduit que $\frac{1}{h} - \delta \stackrel{(**)}{\geq} \frac{1}{h} \sum_{\chi \neq \mathbf{1}} n(\chi) \geq 0$, ce qui prouve que $\delta \leq \frac{1}{h}$.

Supposons à présent que $\delta > 0$. On trouve, en réutilisant $(**)$ que $\frac{1}{h} > \frac{1}{h} - \delta \stackrel{(**)}{\geq} \frac{1}{h} \cdot \sum_{\chi \neq \mathbf{1}} n(\chi)$; et ainsi $\sum_{\chi \neq \mathbf{1}} n(\chi) < 1$, ce qui montre que $n(\chi) = 0$, pour tout $\chi \neq \mathbf{1}$. Par définition des $n(\chi)$, cela implique que pour tout $\chi \neq \mathbf{1}$,

$$L_{\mathfrak{m}}(1, \chi) \neq 0 \quad \text{et donc que } \mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi) \text{ est holomorphe au voisinage de } s = 1.$$

Soit \mathfrak{K} une classe de $I(\mathfrak{m})$ modulo H , et soit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{K}$. Il est évident que si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \cap I(\mathfrak{m})$, on a $\mathfrak{p} \in \mathfrak{K} \iff \mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{p} \in H$. Ainsi, $\sum_{\chi \in \widehat{I(\mathfrak{m})/H}} \chi^{-1}(\mathfrak{a}) \cdot \chi(\mathfrak{p}) = \begin{cases} h & \text{si } \mathfrak{p} \in \mathfrak{K} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Et donc, en réutilisant (i) et (ii), on trouve :

$$\begin{aligned}
 h \cdot \sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{K} \cap \mathbb{P}_0(K)} \frac{1}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} &= \sum_{\chi \in \widehat{I(\mathfrak{m})/H}} \chi^{-1}(\mathfrak{a}) \cdot \sum_{\mathfrak{p} \in I(\mathfrak{m}) \cap \mathbb{P}_0(K)} \frac{\chi(\mathfrak{p})}{\mathbb{N}(\mathfrak{p})^s} \\
 &= \sum_{\chi \in \widehat{I(\mathfrak{m})/H}} \chi^{-1}(\mathfrak{a}) \underbrace{\log L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)}_{\text{holomorphe au vg de 1 si } \chi \neq \mathbf{1}} + \hat{g}(s) \\
 &= -\text{Log}(s-1) + \hat{g}(s),
 \end{aligned}$$

où $\hat{g}(s)$ et $\hat{g}(s)$ sont des fonctions holomorphes au voisinage de 1. Cela prouve que $\mathfrak{K} \cap \mathbb{P}_0(K)$ est régulier de densité $\frac{1}{h}$ et donc le théorème. #

Maintenant, nous pouvons enfin énoncer le premier résultat important de la théorie du corps de classe :

Théorème (2.20) (première inégalité du corps de classe)

Soit L/K une extension galoisienne, \mathfrak{m} un K -module, alors

$$h := [I_K(\mathfrak{m}) : P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))] \leq [L : K].$$

De plus, si on pose $H = P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$ et soit $\chi \in \widehat{I_K(\mathfrak{m})/H}$, $\chi \neq \mathbf{1}$, alors $L_{\mathfrak{m}}(1, \chi) \neq 0$ et si $\mathfrak{K} \in I_K(\mathfrak{m})/H$ alors $\mathfrak{K} \cap \mathbb{P}_0(K)$ est régulier de densité $\frac{1}{h}$.

preuve

Posons $S = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ se décompose complètement dans } L \text{ et } \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}\}$. Le Lemme (2.14) montre que S est de densité $\delta := \frac{1}{[L:K]}$ (les premiers divisant \mathfrak{m} , ne changent rien à l'affaire, puisqu'il n'y en a qu'un nombre fini). On applique alors le Théorème (2.19) dans ce cas (on peut, car souvenons-nous que tout idéal premier totalement décomposé est une norme), cela montre notre théorème. #

Chapitre 3 :

Théorème de Čebotarev

Nous allons (comme le titre peut le faire imaginer) démontrer le théorème de Čebotarev. *A priori*, ce théorème ne nous sera pas utile pour prouver les principaux résultats de la théorie du corps de classe. Mais plusieurs résultats obtenus aux chapitres précédents nous permettront de prouver un version affaiblie de ce théorème. Nous aurons néanmoins recourt à un résultat que nous montrerons ultérieurement pour passer de la version faible à la version forte de ce théorème. Mais foin de considération un peu oiseuse, voici de quoi il s'agit :

Théorème (3.1) (Théorème de Čebotarev)

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres de groupe de Galois G . Soit C une classe de conjugaison de G . Alors l'ensemble

$$A = \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p} \text{ est un idéal premier de } K \text{ non ramifié dans } L \text{ avec } \text{Fr}_{L/K}(\mathfrak{p}) = C\}$$

est régulier et sa densité de Dirichlet vaut $\frac{|C|}{|G|}$.

On rappelle que si \mathfrak{p} est un idéal de O_K , $\text{Fr}_{L/K}(\mathfrak{p})$ est l'ensemble $\{\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{P}|\mathfrak{p}\}$, qui est une classe de conjugaison, car tous les $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ sont conjugués entre eux si \mathfrak{p} est fixé; et enfin $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ est l'unique l'élément de G qui satisfait :

$$\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})(x) \equiv x^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \pmod{\mathfrak{P}} \quad \text{pour tout } x \in O_L.$$

Tout cela a été vu au Chapitre 0 en plus grand détail.

Nous allons montrer ce résultat en trois étapes : la première lorsque L/K est une extension cyclotomique (c'est à dire que $L \subset K(\zeta)$ pour une certaine racine de l'unité ζ , la deuxième lorsque L/K est abélienne et la troisième dans le cas quelconque. Nous n'aurons besoin de la théorie du corps de classe que dans le troisième cas. Le premier cas n'est qu'une compilation de résultats déjà obtenus

Proposition (3.2)

Le théorème de Čebotarev est vrai dans le cas où L/K est une extension cyclotomique.

Preuve

Soit C une classe de conjugaison de G . Puisque G est abélien, $C = \{\sigma\}$, $\sigma \in G$. Soit \mathfrak{m} un K -module satisfaisant les hypothèses du Théorème (0.16). Nous savons que, dans notre cas, l'application d'Artin $\Phi_{L/K}^{\mathfrak{m}} : I_K(\mathfrak{m}) \longrightarrow G$ est surjective (cf. Proposition (2.16)), ainsi il existe $\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{m})$ tel que $\Phi_{L/K}^{\mathfrak{m}}(\mathfrak{a}) = \sigma$. Posons $H = \ker \Phi_{L/K}^{\mathfrak{m}}$. Nous avons vu au Théorème (0.16) que dans notre cas, nous avons $P_{\mathfrak{m}} \subset H \subset I_K(\mathfrak{m})$. Posons $S = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ est non ramifié dans } L \text{ et } \text{Fr}_{L/K}(\mathfrak{p}) = \{Id_G\}\}$. Le Corollaire (2.15), partie a) nous montre que S est régulier de densité de Dirichlet $\frac{1}{|G|}$, car dans notre cas, $\text{Fr}_{L/K}(\mathfrak{p})$ est réduit à un seul élément qui est $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ où \mathfrak{P} est n'importe quel idéal de O_L au-dessus de \mathfrak{p} . Il est enfin clair que $S \subset H \cap \mathbb{P}_0(K)$. Soit \mathfrak{K} la classe de \mathfrak{a} dans $I_K(\mathfrak{m})/H$. Le Théorème (2.19) s'applique alors

et on a donc que $S' = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \in \mathfrak{A}\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \Phi_{L/K}^m(\mathfrak{p}) = \sigma\} = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \text{Fr}_{L/K}(\mathfrak{p}) = C\}$ est régulier de densité $\frac{1}{[I_K(\mathfrak{m}):H]} = \frac{1}{|G|}$. Cela prouve notre proposition. \neq

On peut déjà montrer le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques :

Corollaire (3.3)

Si m et n sont des nombres entiers premiers entre eux, $n > 1$, alors il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p \equiv m \pmod{n}$.

Preuve

Posons $K = \mathbb{Q}$ et $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Posons encore σ_m l'élément de $\text{Gal}(L/K)$ qui envoie ζ_n sur ζ_n^m . Par le théorème de Čebotarev appliqué à L/K (qui est une extension cyclique), l'ensemble des premiers p de $\mathbb{P}_0(\mathbb{Q})$ tels que $\text{Frob}(\mathfrak{p}/p) = \sigma_m$ (\mathfrak{p} est un idéal premier de O_L au-dessus de p) est de densité $\frac{1}{[L:K]} \neq 0$, donc est infini. Or, de tels p sont congrus à m modulo n , car $\text{Frob}(\mathfrak{p}/p) = \sigma_m$ implique en particulier que $\zeta_n^p \equiv \zeta_n^m \pmod{\mathfrak{p}}$ ce qui veut dire (Lemme (0.13)) que $\zeta_n^p = \zeta_n^m$ ou encore que $p \equiv m \pmod{n}$. \neq

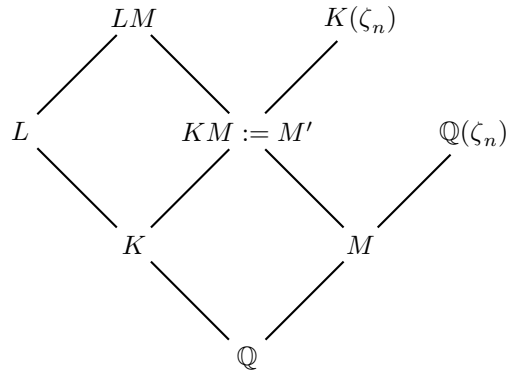
Préparations au cas abélien

Lemme (3.4)

Soit L/K une extension de corps de nombres et $m > 1$ un entier naturel. Alors il existe une extension M/K cyclotomique et cyclique de degré m telle que $M \cap L = K$ (les extensions L/K , M/K telle que $M \cap L = K$ sont dites linéairement disjointes).

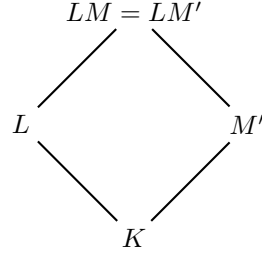
Preuve

Voyons tout d'abord qu'il suffit de prouver le lemme pour $K = \mathbb{Q}$: supposons donc que ce soit vrai dans ce cas-là et montrons le cas général. Supposons donc L/K comme dans l'hypothèse de ce lemme et qu'il existe M/\mathbb{Q} une extension cyclique cyclotomique de degré m telle que $M \cap L = \mathbb{Q}$. On a donc le diagramme suivant :



L'extension $(KM = M')/K$ est évidemment cyclotomique, car $M' \subset K(\zeta)$. De plus, puisque $L \cap M = \mathbb{Q}$, on a bien sûr $M \cap K = \mathbb{Q}$. La théorie de Galois dit que l'extension M'/K est galoisienne de groupe isomorphe à $\text{Gal}(M/(M \cap K)) = \text{Gal}(M/\mathbb{Q})$ qui est, par hypothèse, un groupe cyclique de degré m . En résumé, M'/K est cyclotomique cyclique de degré m . Reste à voir que $M' \cap L = K$. De la même manière

qu'avant et puisque $L \cap M = \mathbb{Q}$, on a que $\text{Gal}(LM/L)$ est isomorphe à $\text{Gal}(M/(M \cap L)) = \text{Gal}(M/\mathbb{Q})$ qui est cyclique d'ordre m . En appliquant à nouveau la théorie de Galois au diagramme



on trouve que $\text{Gal}(LM'/L) \simeq \text{Gal}(M'/(M' \cap L))$. Donc $|\text{Gal}(M'/(M' \cap L))| = |\text{Gal}(M'/K)| = m$. Cela prouve que $M' \cap L = K$.

Prouvons alors le cas $K = \mathbb{Q}$. Soit donc L/\mathbb{Q} une extension de degré finie. Si L_1/\mathbb{Q} et L_2/\mathbb{Q} sont des sous-extensions cyclotomiques de L/\mathbb{Q} , alors L_1L_2/\mathbb{Q} en est aussi une. Il y a donc, parmi les sous-extensions de L/\mathbb{Q} , une extension cyclotomique maximale L_0/\mathbb{Q} . Soit n tel que $L_0 \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Soit $p \in \mathbb{P}_0(\mathbb{Q})$ tel que $p \nmid n$ et $p \equiv 1 \pmod{m}$ (l'existence d'un tel p est un cas particulier du Théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques, ou alors de la remarque ci-après). Par maximalité de L_0 , on a $\mathbb{Q}(\zeta_p) \cap L \subset L_0 \subset \mathbb{Q}(\zeta_n)$. Donc $\mathbb{Q}(\zeta_p) \cap L \subset \mathbb{Q}(\zeta_p) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ est cyclique de degré $p-1$, il y a par la théorie de Galois et puisque tout sous-groupe d'un groupe cyclique est normal, il existe une sous-extension M/\mathbb{Q} cyclique d'ordre m , c'est le sous-corps fixe par l'unique sous-groupe d'ordre $\frac{p-1}{m}$ de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q})$. #

Remarque

Soit m et n des nombres entiers, le fait de l'existence d'un nombre premier tel que $p \nmid n$ et tel que $p \equiv 1 \pmod{m}$ est effectivement un cas particulier du Théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques, mais on peut le démontrer "à la main" de manière semblable à la preuve historique d'Euclide sur l'infinité des nombres premiers. Dire que $p \equiv 1 \pmod{m}$ est équivalent au fait que \mathbb{F}_p^* contient un élément d'ordre m (car \mathbb{F}_p^* est un groupe cyclique ([Jac1, Theorem 2.18, p.132])); cela veut dire que \mathbb{F}_p^* contient une racine du polynôme cyclotomique Φ_m , c'est-à-dire que l'équation $\Phi_m(X) \equiv 0 \pmod{p}$ a une solution. Montrons qu'il y a une infinité de tels p (parmi ceux-là, il y en a qui ne divisent pas n et le tour est joué). Si p_1, \dots, p_r sont des nombres premiers tels que $\Phi_m(X) \equiv 0 \pmod{p_i}$ a une solution modulo p_1, \dots, p_r (c'est possible, car l'équation $\Phi_m(X) = 0, \pm 1$ n'a qu'un nombre fini de solutions); alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $|\Phi_m(m \cdot p_1 \cdots p_r \cdot k)| > 1$. Si $p \mid \Phi_m(m \cdot p_1 \cdots p_r \cdot k)$, alors $p \neq p_1, \dots, p_r$ et $p \nmid m$, car $\Phi_m(m \cdot p_1 \cdots p_r \cdot k) \equiv 1 \pmod{p_1, \dots, p_r}$ et m (le coefficient constant de tout polynôme cyclotomique est 1). Cela prouve notre résultat.

Lemme (3.5)

Soit m et n des entiers tels que $n \mid m$, on pose $T(m, n)$ le nombre des éléments du groupe cyclique d'ordre m qui ont pour ordre un multiple de n . Si $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$ et $m = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$ avec $a_i \leq b_i$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Alors

$$T(m, n) = m \cdot \prod_{i=1}^r (1 - p_i^{a_i-1-b_i}).$$

Preuve

Grâce au théorème chinois, on voit que $T(m, n) = \prod_{i=1}^r T(p_i^{b_i}, p_i^{a_i})$. De plus, $T(p^b, p^a) = \text{nbre d'él. d'ordre } p^a + \text{nbre d'él. d'ordre } p^{a+1} + \dots + \text{nbre d'él. d'ordre } p^b = \varphi(p^a) + \varphi(p^{a+1}) + \dots + \varphi(p^b) = (p^a - p^{a-1}) + (p^{a+1} - p^a) + \dots + (p^b - p^{b-1}) = p^b - p^{a-1} = p^b \cdot (1 - p^{a-1-b})$, ce qui montre alors notre lemme. \neq

Proposition (3.6)

Le théorème de Čebotarev affaibli est vrai pour les extensions abélienne. Par théorème de Čebotarev affaibli, on entend qu'on a la densité de Dirichlet, mais pas la régularité.

Preuve

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres, $G = \text{Gal}(L/K)$ et $\sigma \in G$ d'ordre n . Soit m un multiple de n . Soit M/K une extension cyclotomique, cyclique de degré m telle que $M \cap L = K$; le Lemme (3.4) nous en assure l'existence. Soit $\tau \in \text{Gal}(M/K)$ tel que n divise l'ordre de τ . Posons $F = LM$. La théorie de Galois nous dit que $\text{Gal}(F/K) \simeq \text{Gal}(L/K) \times \text{Gal}(M/K)$. Soit $\rho \in \text{Gal}(F/K)$ l'unique élément tel que $\rho|_L = \sigma$ et $\rho|_M = \tau$. Posons $E = F^\rho$ (le sous-corps de F fixe par ρ). Il est clair que $M \cap E = M^\tau$ (le sous-corps de M fixe par τ). A priori, on a $F \supset EM \supset E$. On va voir, qu'en fait $F = EM$. On a les égalités : $[F : E] = \text{ordre de } \rho = \text{ordre de } \tau = [M : M^\tau] = [M : M \cap E] = [EM : E]$ (la dernière égalité venant de la théorie de Galois). Donc, $F = EM$. On en déduit que F/E est une extension cyclotomique; en effet, puisque M/K est cyclotomique, on a $M \subset K(\zeta)$ pour une racine de l'unité ζ . Donc, $F = EM \subset EK(\zeta) = E(\zeta)$, elle est aussi cyclique (engendrée par ρ), par la théorie de Galois. Le théorème de Čebotarev pour les extensions cyclotomiques s'applique à F/E , et donc, l'ensemble

$$A'_\tau = \{\mathfrak{q} \in \mathbb{P}_0(E) \mid \mathfrak{q} \text{ ne ramifie pas dans } F \text{ et } \Phi_{F/E}(\mathfrak{q}) = \rho\}$$

a une densité de Dirichlet $\delta(A'_\tau) = \frac{1}{[F:E]}$. Si on enlève à A'_τ les idéaux qui sont ramifiés sur K , on trouve la même densité. De plus, si on ne prend que les idéaux \mathfrak{q} de A'_τ tels que $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{q} \cap K) = 1$ ($\Leftrightarrow \mathbb{N}(\mathfrak{q} \cap K) = \mathbb{N}(\mathfrak{q})$), cela ne change rien non plus à la densité (cf. Lemme (2.13)). Ainsi

$$A''_\tau = \{\mathfrak{q} \in \mathbb{P}_0(E) \mid \mathfrak{q} \text{ ne ramifie pas dans } F, \text{ n'est pas ramifié sur } K, \mathbb{N}(\mathfrak{q} \cap K) = \mathbb{N}(\mathfrak{q}) \text{ et } \Phi_{F/E}(\mathfrak{q}) = \rho\}$$

est tel que $\delta(A'_\tau) = \delta(A''_\tau)$. Soit encore

$$A_\tau = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ ne ramifie pas dans } F \text{ et } \Phi_{F/K}(\mathfrak{p}) = \rho\}.$$

Soit $\mathfrak{q} \in A''_\tau$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap K$. Alors $\mathfrak{p} \in A_\tau$. En effet, par propriété de A''_τ , \mathfrak{p} ne ramifie pas dans F . Soit $x \in O_F$. On a $\Phi_{F/K}(\mathfrak{p})(x) \equiv x^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \pmod{\mathfrak{P}}$, où \mathfrak{P} est n'importe quel idéal premier de F au-dessus de \mathfrak{p} , en particulier pour ceux au-dessus de \mathfrak{q} . Or, par hypothèse, $\mathbb{N}(\mathfrak{p}) = \mathbb{N}(\mathfrak{q})$. Donc, pour tout \mathfrak{P} au-dessus de \mathfrak{q} et tout $x \in O_F$, on a

$$\Phi_{F/K}(\mathfrak{p})(x) \equiv x^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \equiv x^{\mathbb{N}(\mathfrak{q})} \equiv \Phi_{F/E}(\mathfrak{q})(x) \pmod{\mathfrak{P}}.$$

Ainsi, $\Phi_{F/K}(\mathfrak{p}) = \Phi_{F/E}(\mathfrak{q}) = \rho$ par hypothèse sur \mathfrak{q} et puisque l'automorphisme de Frobenius est caractérisé par ces congruences.

Réciproquement, soit $\mathfrak{p} \in A_\tau$ et $\mathfrak{q} \in \mathbb{P}_0(E)$ au-dessus de \mathfrak{p} . En particulier, on a que \mathfrak{q} ne ramifie pas sur K et ne ramifie pas dans F . Comme $\Phi_{E/K}(\mathfrak{p}) = \Phi_{F/K}(\mathfrak{p})|_E = \rho|_E = \text{Id}_E$, on en déduit que $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = 1$, car $\Phi_{E/K}(\mathfrak{p}) = \text{Frob}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})$ qui est d'ordre $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p})$. Ainsi, $\mathbb{N}(\mathfrak{q}) = \mathbb{N}(\mathfrak{p}) = \mathbb{N}(\mathfrak{q} \cap K)$. En particulier, cette égalité nous permet de montrer comme avant que $\Phi_{F/E}(\mathfrak{q}) = \Phi_{F/K}(\mathfrak{p}) = \rho$, donc $\mathfrak{q} \in A_\tau''$. On vient de voir aussi que chaque $\mathfrak{p} \in A_\tau$ est totalement décomposé dans E , c'est à dire que \mathfrak{p} a exactement $[E : K]$ idéaux premiers \mathfrak{q} au-dessus de lui. Et donc, si $s > 1$, on a $[E : K] \sum_{\mathfrak{p} \in A_\tau} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s} = \sum_{\mathfrak{q} \in A_\tau''} \mathbb{N}(\mathfrak{q})^{-s}$. Cela prouve que la densité de Dirichlet de A_τ vaut

$$\delta(A_\tau) = \frac{1}{[E : K]} \cdot \delta(A_\tau'') = \frac{1}{[E : K]} \cdot \frac{1}{[F : E]} = \frac{1}{[F : K]}.$$

Il évident que pour tout $\tau \in \text{Gal}(M/K)$, on a

$$A_\tau \subset C_\sigma = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K) \mid \mathfrak{p} \text{ non ramifié dans } L \text{ et } \Phi_{L/K}(\mathfrak{p}) = \sigma\}.$$

D'autre part, les A_τ sont tous disjoints, lorsque τ varie. Posons \mathfrak{T} l'ensemble des $\tau \in \text{Gal}(M/K)$ tels que l'ordre de σ ($= n$) divise l'ordre de τ . On a $\bigsqcup_{\tau \in \mathfrak{T}} A_\tau \subset C_\sigma$. Ainsi, pour $s > 1$, on a :

$$1 \geq \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in C_\sigma} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}} \geq \frac{\sum_{\tau \in \mathfrak{T}} \sum_{\mathfrak{p} \in A_\tau} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}},$$

et donc, en vertu de cette inégalité et du calcul de $\delta(A_\tau)$, on trouve :

$$\liminf_{s \rightarrow 1^+} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in C_\sigma} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}} \geq \frac{T(m, n)}{\underbrace{[F : K]}_{=LM}} = \frac{1}{[L : K]} \cdot \frac{T(m, n)}{[M : K]} = \frac{1}{[L : K]} \cdot \frac{T(m, n)}{m}.$$

Si $n = p_1^{a_1} \cdots p_r^{a_r}$, on choisit $m = p_1^{b_1} \cdots p_r^{b_r}$ avec des b_i aussi grands qu'on veut. Ainsi, grâce au lemme précédent, on a $\frac{T(m, n)}{m} = \prod_{i=1}^r (1 - p_i^{a_i-1-b_i}) \rightarrow 1$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 1$, il existe $s_1 > 1$ tel que si $1 < s < s_1$, on ait $\frac{\sum_{\mathfrak{p} \in C_\sigma} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}} > \frac{1}{[L:K]} - \varepsilon$. Ce qui veut dire, en posant $f_\sigma(s) = \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in C_\sigma} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}}$ que l'on a

$$\liminf_{s \rightarrow 1} f_\sigma(s) \geq \frac{1}{[L : K]}.$$

On va montrer que $\limsup_{s \rightarrow 1} f_\sigma(s) \leq \frac{1}{[L:K]}$. Tout d'abord, remarquons que pour tout $s > 1$, on a $\sum_{\sigma \in G} f_\sigma(s) = 1$ (c'est évident, car G est abélien et l'application d'Artin est surjective). C'est ce raisonnement qui nous permettra de conclure : ce qu'on vient de voir nous dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $s_\sigma(\varepsilon)$ tel que $f_\sigma(s) > \frac{1}{|G|} - \frac{\varepsilon}{|G|-1}$, si $1 < s < s_\sigma(\varepsilon)$. Fixons σ_0 et soit $s_0(\varepsilon) = \min_{\sigma \neq \sigma_0} s_\sigma(\varepsilon)$. Pour tout $1 < s < s_0(\varepsilon)$, on a $\frac{|G|-1}{|G|} - (|G|-1) \cdot \frac{\varepsilon}{|G|-1} + f_{\sigma_0}(s) < \sum_{\sigma \in G} f_\sigma = 1$, ce qui montre que

$$f_{\sigma_0}(s) < \frac{1}{|G|} + \varepsilon.$$

On a donc prouvé que pour tout $\sigma \in G$, on a

$$\limsup_{s \rightarrow 1} f_\sigma(s) \leq \frac{1}{|G|} = \frac{1}{[L : K]},$$

ce qui prouve que $\lim_{s \rightarrow 1} \frac{\sum_{\mathfrak{p} \in C_\sigma} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}}{\sum_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s}} = \frac{1}{|G|}$, et donc le théorème de Čebotarev affaibli, dans le cas abélien, car l'ensemble des idéaux premiers de K est de densité 1 (voir Définitions (2.12)). \neq

Attention ! ici, nous n'avons prouvée que la partie "faible" du théorème, c'est-à-dire que nous avons la densité de Dirichlet, mais pas la régularité.

Théorème (3.7)

Le Čebotarev affaibli est vrai pour les extension galoisienne quelconque est vrai. Mieux : si le Théorème de Čebotarev (fort) est vrai pour les extensions abéliennes, il est vrai pour les extensions galoisiennes quelconques.

Preuve

Soit donc L/K une extension galoisienne de corps de nombres de groupe G et soit C une classe de conjugaison de G . Posons

$$A = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ est non ramifié dans } L \text{ avec } \text{Fr}_{L/K}(\mathfrak{p}) = C\}.$$

Pour la preuve, fixons, $\tau \in C$ et $K' = L^\tau$ (le corps fixe par τ). La théorie de Galois nous dit que L/K' est galoisienne et $\text{Gal}(L/K') = \langle \tau \rangle$ cyclique. Posons encore

$$D' = \{\mathfrak{q} \in \mathbb{P}_0(K') \mid \mathfrak{q} \text{ ne ramifie pas dans } L, \text{ non ramifié sur } K, f(\mathfrak{q}/\mathfrak{q} \cap K) = 1 \text{ et } \Phi_{L/K'}(\mathfrak{q}) = \tau\}.$$

Soit $\mathfrak{q} \in D'$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap K$. Soit encore $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L)$ au-dessus de \mathfrak{q} . Puisque $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{q} \cap K) = 1$, on a $\mathbb{N}(\mathfrak{q}) = \mathbb{N}(\mathfrak{p})$, et donc, $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \equiv x^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} = x^{\mathbb{N}(\mathfrak{q})} \equiv \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{q}) \pmod{\mathfrak{P}}$. Ainsi, puisque les automorphismes de Frobenius sont caractérisés par ces congruences, on a $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{q}) = \Phi_{L/K'}(\mathfrak{q}) = \tau$. On a aussi $e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{q}) \cdot e(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = 1$. Donc, $\mathfrak{p} \in A$. Remarquons encore au passage que l'ordre de $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{q}) = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{q})$. D'autre part, l'ordre de $\tau = \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{q})$ vaut $[L : K']$. Donc \mathfrak{P} est le seul idéal de L au-dessus de \mathfrak{q} (*).

Réciproquement, soit $\mathfrak{p} \in A$. Alors il existe $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L)$ au-dessus de \mathfrak{p} tel que $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \tau$. Alors $\mathfrak{q} := \mathfrak{P} \cap K'$ n'est pas ramifié sur K , ni dans L ; et $\text{Frob}(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})|_{K'} = \tau|_{K'} = \text{Id}_{K'}$. Cela montre que $f(\mathfrak{q}/\mathfrak{p}) = 1$ (c'est l'ordre du Frobenius). Donc $\mathbb{N}(\mathfrak{p}) = \mathbb{N}(\mathfrak{q})$ et donc, par le même argument que tout à l'heure, on a $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{q}) = \Phi_{L/K'}(\mathfrak{q}) = \tau$. Ainsi, $\mathfrak{q} \in D'$.

Ainsi, on a prouvé que $\mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap K$ est une application surjective de $D' \rightarrow A$. L'affirmation (*) prouve de plus que pour chaque $\mathfrak{p} \in A$, le nombre de \mathfrak{q} dans D' au-dessus de \mathfrak{p} est égal au nombre de $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L)$ au-dessus de \mathfrak{p} tel que $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \tau$. Soit \mathfrak{P}_0 l'un de ces \mathfrak{P} . Soit $\sigma \in G$. Soit $C_G(\tau)$ le centralisateur de τ dans G (c'est-à-dire les éléments de G qui commutent avec τ). De la relation $\text{Frob}(\sigma(\mathfrak{P}_0)/\mathfrak{p}) = \sigma\tau\sigma^{-1}$, on aura $\text{Frob}(\sigma(\mathfrak{P}_0)/\mathfrak{p}) = \tau$ si et seulement si $\sigma \in C_G(\tau)$. Il est donc clair que $Z(\mathfrak{P}_0/\mathfrak{p}) = \{\nu \in G \mid \nu(\mathfrak{P}_0) = \mathfrak{P}_0\}$ est un sous-groupe de $C_G(\tau)$ et chaque $\sigma(\mathfrak{P}_0)$ est compté $|Z(\sigma(\mathfrak{P}_0)/\mathfrak{p})| = |Z(\mathfrak{P}_0/\mathfrak{p})|$ fois. En définitive, le nombre de $\mathfrak{q} \in D'$ au-dessus de $\mathfrak{p} \in A$ est $\frac{|C_G(\tau)|}{|Z(\mathfrak{P}_0/\mathfrak{p})|}$.

D'autre part, $|C| = [G : C_G(\tau)]$ et $|Z(\mathfrak{P}_0/\mathfrak{p})| = f(\mathfrak{P}_0/\mathfrak{p}) = f(\mathfrak{P}_0/\mathfrak{q}) = [L : K']$. Ainsi,

$$\frac{|C_G(\tau)|}{|Z(\mathfrak{P}_0/\mathfrak{p})|} = \frac{|C_G(\tau)| \cdot |C|}{[L : K'] \cdot |C|} = \frac{|G|}{[L : K'] \cdot |C|} = \frac{[L : K]}{[L : K'] \cdot |C|}.$$

Ce qui montre que si $\Re(s) > 1$, on a $\sum_{\mathfrak{p} \in A} \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-s} = \frac{|C| \cdot [L:K']}{[L:K]} \cdot \sum_{\mathfrak{q} \in D'} \mathbb{N}(\mathfrak{q})^{-s}$. D'autre part, si

$$D = \{\mathfrak{q} \in \mathbb{P}(K') \mid \mathfrak{q} \text{ ne ramifie pas dans } L \text{ et } \Phi_{L/K'}(\mathfrak{q}) = \tau\},$$

on a $\sum_{\mathfrak{q} \in D} \mathbb{N}(\mathfrak{q})^{-s} = \sum_{\mathfrak{q} \in D'} \mathbb{N}(\mathfrak{q})^{-s} + g(s)$ où g est une fonction holomorphe sur un voisinage de 1; en effet, pour obtenir D , on a ajouté à D' un nombre fini d'idéaux (ceux qui ramifient sur K) et ceux dont le $f > 1$, qui est un ensemble de densité nulle (cf. Lemme (2.13)). Par le théorème de Čebotarev appliqué à l'extension L/K' et à D (cette extension est cyclique, donc abélienne; mais attention, pas forcément cyclique cyclotomique, donc, on ne peut donc pas faire l'économie de la Proposition (3.6)), l'ensemble D a une densité de Dirichlet de $\frac{1}{[L:K']}$. Donc D' a aussi une densité de $\frac{1}{[L:K']}$ et finalement, A a une densité de Dirichlet $\frac{|C|}{[L:K]}$. #

Remarque

Dans la démonstration précédente, on voit que si D est régulier, alors A aussi. Il suffit donc de prouver que le théorème de Čebotarev fort pour les extensions abélienne. La seule preuve que nous connaissons utilise un théorème fondamental de la théorie du corps de classe qui s'énonce comme suit :

Lemme (3.8)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Alors il existe un K -module \mathfrak{m} , divisible par tous les idéaux premiers de O_K qui ramifient dans L , tel que

$$P_{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K} : I_K(\mathfrak{m}) \rightarrow \text{Gal}(L/K)).$$

Preuve

C'est le Théorème (7.14) (qu'on appelle "théorème de réciprocité d'Artin"). On espère que le lecteur aura vérifié qu'on n'a pas utilisé le théorème de Čebotarev fort pour les extensions abéliennes pour prouver ce résultat. #

Corollaire (3.9)

Le théorème Čebotarev fort est vrai pour les extensions abéliennes

Preuve

Soit C une classe de conjugaison de $G = \text{Gal}(L/K)$ abélien. Puisque par le lemme précédent il existe \mathfrak{m} tel que $P_{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K})$, on fait le même (exactement le même) raisonnement que pour la preuve du théorème de Čebotarev fort pour les extensions cyclotomiques (Proposition (3.2)) et on trouve que l'ensemble $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ ne divise pas } \mathfrak{m} \text{ et } \text{Fr}_{L/K} = C\}$ est régulier et de densité $\frac{1}{|G|}$. Comme on a vu au lemme précédent que \mathfrak{m} peut être divisible par tout les premiers qui ramifient dans L , l'ensemble $\{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ ne ramifie pas dans } L \text{ et } \text{Fr}_{L/K} = C\}$ est aussi régulier et de densité $\frac{1}{|G|}$ (la différence entre les deux ensembles est un ensemble fini). Cela prouve le corollaire. #

INTERLUDE

Maintenant vient quelques résultats "annexes" qui ne sont pas directement nécessaires pour la preuve des grands résultats que nous nous proposons de démontrer, mais qui nous ont paru digne d'intérêt. Voici

un premier théorème dont l'énoncé a probablement effleuré chacun de nous au moins une fois dans sa vie et qui a peut-être été à la base du théorème de Čebotarev.

Théorème (3.10)

Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ irréductible (sur $\mathbb{Z}[X]$, ou sur $\mathbb{Q}[X]$, c'est égal grâce au lemme de Gauss (cf. [La1, Théorème 4.2.3, p.191])) de degré $n > 1$. Soit $p \in \mathbb{P}_0(\mathbb{Q})$ un nombre premier. Notons \bar{f} la réduction modulo p de f . Alors les affirmations suivantes sont vraies :

- a) Il existe une infinité de premiers p pour lesquels \bar{f} est totalement scindé dans $\mathbb{F}_p[X]$ (i.e. est le produit de polynômes de degré 1)
- b) Il existe une infinité de premiers p tels que \bar{f} n'a pas de racine dans \mathbb{F}_p .
- c) Si n est premier, il existe une infinité de p pour lesquels \bar{f} est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Preuve

Posons $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ les racines de f dans \mathbb{C} . Soit L/\mathbb{Q} le corps des racines de f (splitting field en anglais cf. [Jac1, p. 225 et suiv.] pour plus de détails) et $E = \mathbb{Q}(\theta)$. Posons $G = \text{Gal}(L/\mathbb{Q})$ et $H = \text{Gal}(L/E) (= \{\sigma \in G \mid \sigma(\theta) = \theta\})$. L'application $\tau H \mapsto \tau(\theta)$ est une bijection bien définie de $\{\tau H \mid \tau \in G\}$ sur $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ (ils ont le même nombre d'éléments et il y a surjection, G agissant transitivement sur les racines). C'est une bijection de G -ensembles (action à gauche).

- a) Soit p un nombre premier ne divisant pas le discriminant de f (c'est le discriminant de $\mathbb{Z}[\theta]$ comme \mathbb{Z} -module qui vaut aussi $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\theta_i - \theta_j)^2$); *a fortiori*, p ne divise pas le discriminant de E/\mathbb{Q} , donc ne ramifie pas dans E , ni dans L (par définition du corps des racines et grâce au Lemme "décomposition-ramification", page 3). Soit \mathfrak{p} un idéal premier de L au-dessus de p . Posons $\bar{G} = \text{Gal}((O_L/\mathfrak{p})/\mathbb{F}_p)$, $\sigma = \text{Frob}(\mathfrak{p}/p)$, $\bar{\theta}_i$ la réduction modulo \mathfrak{p} des θ_i et $\bar{\sigma}$ le générateur de \bar{G} (auss appelé Frobenius). Puisque p ne divise pas le discriminant de f (ce qui veut dire que le discriminant de \bar{f} est non nul) les $\bar{\theta}_i$ sont tous disjoints. Il est clair que (par définition de σ) $\bar{\sigma}$ permute les $\bar{\theta}_i$ de la même manière que σ permute les θ_i . Les racines de \bar{f} qui sont dans \mathbb{F}_p sont celles laissées fixes par $\bar{\sigma}$. En particulier, \bar{f} est scindé totalement dans $\mathbb{F}_p[X]$ si et seulement si $\bar{\sigma}(\bar{\theta}_i) = \bar{\theta}_i$ donc si et seulement si $\sigma(\theta_i) = \theta_i$ pour $i = 1, \dots, n$; ce qui veut dire que $\sigma = 1$ dans G qui est équivalent au fait que p se décompose totalement dans L (ou dans E , cf. Lemme "décomposition-ramification", page 3). Or, ces p ont une densité de $\frac{1}{[L:\mathbb{Q}]}$ (cf. Lemme (2.14)). Ce qui prouve qu'ils sont une infinité. Remarquons, qu'ici on n'a pas utilisé le théorème de Čebotarev.
- b) Sous les mêmes notations qu'en a), dire que \bar{f} n'a pas de racine dans \mathbb{F}_p revient à dire que $\bar{\sigma}(\bar{\theta}_i) \neq \bar{\theta}_i$ ou encore $\sigma(\theta_i) \neq \theta_i$ pour $i = 1, \dots, n$. Cela veut dire que $\sigma(\tau H) \neq \tau H$, ou encore $\sigma \notin \tau H \tau^{-1}$ pour tout $\tau \in G$. On va montrer que de tels σ existent toujours. Le nombre de classes des conjugués de H est l'indice dans G du normalisateur de H (les τ tels que $\tau H \tau^{-1} = H$). Comme ce normalisateur contient H , cet indice est $\leq \frac{|G|}{|H|}$. Et alors (petite subtilité avec l'identité qui est dans toutes les classes) :

$$|\cup_{\tau} \tau H \tau^{-1}| \leq \frac{|G|}{|H|} \cdot (|H| - 1) + 1 = |G| - \frac{|G|}{|H|} + 1 < |G|,$$

car $\frac{|G|}{|H|} = n > 1$. Donc de tels σ existent. Appliquant le théorème de Čebotarev pour C , la classe de conjugaison d'un de ces sigmas, on voit qu'il existe une infinité de p tels $\text{Fr}_{L/\mathbb{Q}}(p) = C$ ce qui montre la partie b).

- c) Il est clair que \bar{f} est irréductible $\Leftrightarrow \bar{\sigma}$ agit cycliquement sur les $\bar{\theta}_i$ (si $(\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_r)$ est un cycle de l'action sur les $\bar{\theta}_i$, le polynôme $(X - \bar{\theta}_1) \cdots (X - \bar{\theta}_r)$ est un polynôme qui divise \bar{f} et qui est dans $\mathbb{F}_p[X]$, car laissé fixe par $\bar{\sigma}$). Donc \bar{f} est irréductible $\Leftrightarrow \sigma$ agit cycliquement sur les $\theta_i \Rightarrow$ l'ordre de σ est n . Réciproquement, si σ est d'ordre n et si de plus, n est premier, alors σ agit nécessairement cycliquement sur les θ_i (en effet, l'ordre de σ est égal au ppcm de l'ordre des sous-cycles disjoints de la permutation des θ_i par l'action de σ , car les θ_i engendrent L , et comme cet ordre est premier, cela veut dire qu'il n'y a qu'un cycle); donc, $\bar{\sigma}$ agit cycliquement sur les $\bar{\theta}_i$, donc \bar{f} est irréductible. Comme $n \mid |G|$ et que n est premier, le théorème de Cauchy (qui est un corollaire du premier théorème de Sylow (cf. [La1, Thm. 1.6.2, p. 35]), mais qu'on peut très bien montrer pour lui-même, mais je ne le ferai pas, ce n'est pas digne de vous si vous avez pu lire jusqu'ici) nous assure l'existence d'un élément τ de G d'ordre n . Chaque élément de C , la classe de conjugaison de τ , est aussi d'ordre n . Le théorème de Čebotarev appliqué à C nous assure donc une infinité de $p \in \mathbb{P}_0(\mathbb{Q})$ tels que le $\text{Frob}(\mathfrak{p}/p)$ agit cycliquement sur les θ_i , ce qui veut dire que \bar{f} est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$. \neq

Remarque

Dans la partie c) du théorème précédent l'hypothèse n premier est cruciale. En effet, le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (c'est le 8^e polynôme cyclotomique) et il n'est irréductible dans aucun \mathbb{F}_p :

- a) Dans \mathbb{F}_2 , il vaut $(X + 1)^4$,
- b) Si $p \equiv 1 \pmod{8}$, il est totalement scindé. En effet, on a vu à la partie a) du théorème précédent que $X^4 + 1$ se scinde totalement si et seulement si p se décompose totalement dans $\mathbb{Q}[X]/(X^4 + 1) \simeq \mathbb{Q}(\zeta_8)$, si et seulement si $f(\mathfrak{p}/p) = 1$ pour tout idéal \mathfrak{p} au-dessus de p . Or, $f(\mathfrak{p}/p)$ est l'ordre de p modulo 8. En effet, $\text{Frob}_{\mathbb{Q}(\zeta_8)/\mathbb{Q}}(p) =: \sigma_p$, est tel que $\sigma_p(\zeta_8) = \zeta_8^p$ (cf. preuve du Théorème (0.14)); l'ordre de σ_p est l'ordre de p modulo 8 mais vaut aussi $f(\mathfrak{p}/p)$ par définition. Dans notre cas, cet ordre vaut justement 1, ce qui montre l'affirmation.
- c) Si $p \not\equiv 1 \pmod{8}$, on a tout de même $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$. Cela veut dire qu'ici $f(\mathfrak{p}/p)$, qui est l'ordre de $\text{Frob}_{\mathbb{Q}(\zeta_8)/\mathbb{Q}}(p)$ vaut 2, il ne peut donc pas agir cycliquement sur les racines de $X^4 + 1$, ce qui veut dire que $\bar{X}^4 + 1$ n'est pas irréductible.

Le second résultat que nous allons présenter est une généralisation du Théorème (2.17) et quelques extras.

Définition (3.11)

Soit L/K une extension de corps de nombres. Notons $S(L/K) = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ se décompose complètement dans } L\}$. Rappelons qu'on a montré au Lemme (2.14) que $\delta(S(L/K)) = \frac{1}{[E:K]}$, où E est la clôture galoisienne de L/K . On pose ensuite $\tilde{S}(L/K) = \{P \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ ne ramifie pas dans } L \text{ et il existe (au moins) un premier } \mathfrak{P} \text{ de } L \text{ au-dessus de } \mathfrak{p} \text{ avec } f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = 1\}$. Il est clair que si L/K est une extension galoisienne, alors $S(L/K) = \tilde{S}(L/K)$

Théorème (3.12)

Soit L/K une extension de corps de nombres. Alors $\tilde{S}(L/K)$ a une densité de Dirichlet

$$\delta(\tilde{S}(L/K)) \geq \frac{1}{[L:K]},$$

avec égalité si et seulement si L/K est galoisienne.

preuve

Soit E/K la clôture galoisienne de L/K . Notons $G = \text{Gal}(E/K)$ et $H = \text{Gal}(E/L) \subset G$. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de K non ramifié dans L . Par le Lemme "décomposition-ramification" de la page 3, nous savons que \mathfrak{p} ne ramifie pas non plus dans E . Soit encore \mathfrak{P} un idéal premier au-dessus de \mathfrak{p} et $\sigma = \text{Frob}_{E/K}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Par le Théorème (0.17), $\mathfrak{p} \in \tilde{S}(L/K)$ si et seulement s'il existe $\tau \in G$ tel que $H \cdot \tau \cdot \sigma = H \cdot \tau$, i.e. $\sigma \in \tau^{-1} \cdot H \cdot \tau$. Donc $\mathfrak{p} \in \tilde{S}(L/K)$ si et seulement si $\sigma \in \bigcup_{\tau \in G} \tau^{-1} \cdot H \cdot \tau$. En observant que $\bigcup_{\tau \in G} \tau^{-1} \cdot H \cdot \tau = \bigcup_{h \in H} C_h$, où C_h est la classe de conjugaison de h , en s'inspirant de la preuve du Corollaire (2.15), et grâce au théorème de Čebotarev, on en déduit que $\tilde{S}(L/K)$ a une densité de Dirichlet qui vaut

$$\frac{|\bigcup_{\tau \in G} \tau^{-1} \cdot H \cdot \tau|}{|G|} \geq \frac{|H|}{|G|} = \frac{1}{[L:K]},$$

avec égalité si et seulement si H est normal dans G , si et seulement si L/K est galoisienne. #

Définition (3.13)

Soit L/K une extension de corps de nombres. On dira qu'un idéal premier \mathfrak{p} de K non ramifié dans L a une décomposition du type (f_1, \dots, f_r) , avec $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_r$, si $\mathfrak{p} \cdot O_L = \mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_r$, avec $f(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}) = f_i$, pour $i = 1, \dots, r$.

Théorème (3.14)

Soit L/K une extension de corps de nombres. Posons $A = \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \mathfrak{p} \text{ a une décomposition du type } (f_1, \dots, f_r)\}$. Alors

$$A \neq \emptyset \iff A \text{ a une densité de Dirichlet strictement positive, et donc } |A| = \infty.$$

Preuve

Prouvons la partie \Rightarrow (l'autre étant bien sûr triviale). Soit E/K la clôture galoisienne de L/K . Notons $G = \text{Gal}(E/K)$ et $H = \text{Gal}(E/L)$. Soit aussi $\mathfrak{p} \in A$ (supposé non vide). Soit encore \mathfrak{P} un idéal de E au-dessus de \mathfrak{p} et $\sigma = \text{Frob}_{E/K}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Grâce au Théorème (0.17), on sait qu'il existe, pour $i = 1, \dots, r$, $\tau_i \in \text{Gal}(E/K)$ tel que les $C_i = \{H \cdot \tau_i, H \cdot \tau_i \cdot \sigma, \dots, H \cdot \tau_i \cdot \sigma^{f_i-1}\}$ forment les orbites de l'action de $\langle \sigma \rangle$ sur les classes à droite de G modulo H et les $\mathfrak{p}_i := \tau_i(\mathfrak{P}) \cap L$ sont exactement les idéaux premiers de E au-dessus de \mathfrak{p} . Et finalement $f(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p}) = f_i$, pour $i = 1, \dots, r$. Considérons $C = \{\rho^{-1} \cdot \sigma \cdot \rho \mid \rho \in G\}$ la classe de conjugaison de σ . Par le théorème de Čebotarev (Théorème (3.1)), l'ensemble $B := \{\mathfrak{q} \in \mathbb{P}_0(K) \mid \text{Fr}_{E/K}(\mathfrak{q}) = C\}$ est de densité de Dirichlet $\delta(B) > 0$. Soit $\mathfrak{q} \in B$ et $\Omega \in \mathbb{P}_0(E)$ au dessus de \mathfrak{q} . Par définition de B , il existe $\rho \in G$ tel que $\text{Frob}_{E/K}(\Omega/\mathfrak{q}) = \rho^{-1} \cdot \sigma \cdot \rho$, i.e. $\text{Frob}_{E/K}(\rho(\Omega)/\mathfrak{q}) = \sigma = \text{Frob}_{E/K}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Cela veut dire que les orbites de l'action de $\langle \sigma \rangle$ sont évidemment les mêmes (= les C_i), et donc grâce au Théorème (0.17) que \mathfrak{q} a une décomposition du même type que \mathfrak{p} dans E . Ainsi, $\mathfrak{q} \in A$. On a montré que $B \subset A$ et donc $0 < \delta(B) \leq \delta(A)$. #

Maintenant nous allons donner une généralisation du Théorème (2.17) :

Théorème (3.15)

Soit K un corps de nombres et L/K et M/K des extensions finie de K .

a) Supposons que M/K soit une extension galoisienne. Alors on a :

$$L \subset M \iff S(M/K) \subset S(L/K) \iff \delta(S(M/K) \setminus S(L/K)) = 0.$$

b) Supposons que L/K soit une extension galoisienne. Alors on a :

$$L \subset M \iff \tilde{S}(M/K) \subset S(L/K) (= \tilde{S}(L/K)) \iff \delta(\tilde{S}(M/K) \setminus S(L/K)) = 0.$$

Preuve

Toute les implications \Rightarrow sont triviales.

Montrons la partie b). Il suffit de prouver que $\delta(\tilde{S}(M/K) \setminus S(L/K)) = 0$ et L/K abélienne $\Rightarrow L \subset M$. Soit E/K une extension galoisienne qui contient L et M . En vertu de la correspondance de Galois, il suffit donc de montrer que $\text{Gal}(E/M) \subset \text{Gal}(E/L)$, ou encore que $\sigma|_L = \text{Id}_L$ pour tout $\sigma \in \text{Gal}(E/M)$. Soit donc $\sigma \in \text{Gal}(E/M) \subset \text{Gal}(E/K)$. Soit $C = \{\tau\sigma\tau^{-1} \mid \tau \in \text{Gal}(E/K)\}$, la classe de conjugaison de σ . Par le théorème de Čebotarev, l'ensemble des $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$ tels que $\text{Fr}_{E/K}(\mathfrak{p}) = C$ est de densité strictement positive. Soit donc un tel \mathfrak{p} et $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(E)$ tel que $\text{Frob}_{E/K}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \sigma$ et notons $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \cap O_M$. On sait que $\sigma|_M = \text{Frob}_{M/K}(\mathfrak{P}'/\mathfrak{p})$. Or, puisque $\sigma \in \text{Gal}(E/M)$, on a donc $\text{Frob}_{M/K}(\mathfrak{P}'/\mathfrak{p}) = \text{Id}_M$, i.e. $f(\mathfrak{P}'/\mathfrak{p}) = 1$ et donc $\mathfrak{p} \in \tilde{S}(M/K)$. Par hypothèse, $\delta(\tilde{S}(M/K) \setminus S(L/K)) = 0$, donc puisque l'ensemble dans lequel nous avons été puiser \mathfrak{p} est de densité strictement positive, on peut supposer que $\mathfrak{p} \in S(L/K)$. Donc $\text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{P}''/\mathfrak{p}) = \text{Id}_L$, où $\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P} \cap O_L$. Mais $\text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{P}''/\mathfrak{p}) = \sigma|_L$, donc $\sigma|_L = \text{Id}_L$, ce qui montre la partie b).

Prouvons la partie a). Par hypothèse, on a $\delta(S(M/K) \setminus S(L/K)) = 0$ et M/K galoisienne. On doit montrer que $L \subset M$. Soit L'/K la clôture galoisienne de L/K . En vertu du Lemme “décomposition-ramification”, page 3, on a que $S(L/K) = S(L'/K)$. De plus, puisque M/K est galoisienne, on a $S(M/K) = \tilde{S}(M/K)$. L'hypothèse s'écrit alors $\delta(\tilde{S}(M/K) \setminus S(L'/K)) = 0$. La partie b) nous montre alors que $L' \subset M$ et donc $L \subset L' \subset M$. #

Remarque

La partie a) de ce théorème est connue sous le nom de “Théorème de Bauer”.

Chapitre 4 :

Cohomologie des groupes cycliques et quotient de Herbrand

Ici, nous allons donner quelques rudiments de cohomologie cyclique en détail pour introduire le quotient de Herbrand. Le lecteur expérimenté (ou pressé) voudra bien ne retenir que les Lemmes (4.4) à (4.8), et et passer à la section “**Calculs explicites dans le cas d’extensions cycliques**”

Soit G un groupe noté multiplicativement et A un G -module, c’est-à-dire un groupe abélien $(A, *)$ muni d’une action $G \times A \rightarrow A$, $(\sigma, a) \mapsto \sigma(a)$ avec la propriété que $Id_G(a) = 1(a) = a$, $(\sigma\tau)(a) = \sigma(\tau(a))$ et $\sigma(a * b) = \sigma(a) * \sigma(b)$. Chaque élément σ de G est associé à un unique élément de $\text{End}_{\mathbb{Z}}(A)$ qu’on notera encore σ . Puisque A est un groupe abélien, on le munit aussi via cette action d’une structure de $\mathbb{Z}[G]$ -module : $(\sigma_1 + \sigma_2)(a) := \sigma_1(a) * \sigma_2(a)$.

Supposons à partir de maintenant que $G = \langle \sigma \rangle$ est cyclique d’ordre n . Posons

$$\Delta = 1 - \sigma \quad \text{et} \quad N = 1 + \sigma + \sigma^2 + \cdots + \sigma^{n-1} \in \mathbb{Z}[G].$$

Posons aussi :

$$\Delta|A : A \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto a - \sigma(a) \quad \text{en notation additive}$$

$$a \longmapsto \frac{a}{\sigma(a)} \quad \text{en notation multiplicative,}$$

et

$$N|A : A \longrightarrow A$$

$$a \longmapsto \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i(a) \quad \text{en notation additive}$$

$$a \longmapsto \prod_{i=0}^{n-1} \sigma^i(a) \quad \text{en notation multiplicative.}$$

Par exemple, si L/K est une extension cyclique de groupe G , si $A = L^*$, alors $N|A = N_{L/K}$ est la norme usuelle et si $A = L$, alors $N|A = \text{Tr}_{L/K}$ est la trace usuelle.

Puisque G est cyclique d’ordre n , il est évident que $\Delta N = N \Delta = 0$; donc $\text{Im}(\Delta) \subset \ker(N)$ et $\text{Im}(N) \subset \ker \Delta$. Remarquons aussi que Δ dépend de σ , mais si on prend un autre générateur de G , il a la même image et le même noyau (tout cela vient de la relation $(1 - \sigma)(1 + \sigma + \cdots + \sigma^{i-1}) = 1 - \sigma^i$). On définit alors

$$H^0(A) = \ker(\Delta|A)/N(A) \quad \text{et} \quad H^1(A) = \ker(N|A)/\Delta(A)$$

Si $f : A \rightarrow B$ est un homomorphisme de G -module (ce qui veut dire $f(\sigma(a)) = \sigma(f(a))$ pour tout $a \in A$), alors on a $f\Delta = \Delta f$ et $fN = Nf$. On en déduit que $f(\ker(\Delta|A)) \subset \ker(\Delta|B)$ et $f(\Delta(A)) \subset \Delta(B)$; les mêmes relations sont vérifiées si on remplace Δ par N . Cela implique que f induit des homomorphismes $f_i : H^i(A) \rightarrow H^i(B)$.

Sauf mention expresse, les G -modules seront notés additivement.

Lemme (4.1) (Lemme de l'hexagone)

Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ une suite exacte de G -module. Alors il existe des homomorphismes $\delta_0 : H^0(C) \rightarrow H^1(A)$ et $\delta_1 : H^1(C) \rightarrow H^0(A)$ tels que l'hexagone suivant soit exact partout

$$\begin{array}{ccccc}
 & & H^0(A) & \xrightarrow{f_0} & H^0(B) \\
 & \nearrow \delta_1 & & & \searrow g_0 \\
 H^1(C) & & & & H^0(C) \\
 & \nwarrow g_1 & & & \nearrow \delta_0 \\
 & & H^1(B) & \xleftarrow{f_1} & H^1(A)
 \end{array}$$

Preuve

Définissons δ_0 : le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \Delta|A & & \downarrow \Delta|B & & \downarrow \Delta|C \\
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Soit $c + N(C) \in H^0(C)$. Alors $\Delta(c) = 0$ (puisque par hypothèse $c \in \ker(\Delta|C)$). Nous allons “chasser dans le diagramme” : puisque g est surjective, il existe $b \in B$ tel que $g(b) = c$. Par commutativité du diagramme et puisque $\Delta(c) = 0$, on a $g(\Delta(b)) = 0$; il existe donc $a \in A$ tel que $f(a) = \Delta(b)$. D'autre part, $0 = N(\Delta(b)) = N(f(a)) = f(N(a))$; cela implique que $N(a) = 0$, par injectivité de f . On posera donc

$$\delta_0(c + N(C)) = a + \Delta(A) \in H^1(A).$$

Reste à voir que si $c' + N(C) = c + N(C)$, alors $a - a' \in \Delta(A)$, avec a, a' et b, b' définis par $g(b) = c$, $\Delta(b) = f(a)$ et $g(b') = c'$, $\Delta(b') = f(a')$. Par hypothèse, $c - c' = N(d)$ pour un $d \in C$; soit b'' tel que $d = g(b'')$ (g est surjective). On a $g(b - b' - N(b'')) = 0$, donc $b - b' - N(b'') = f(a'')$ pour un $a'' \in A$. Appliquons Δ à cette dernière égalité. On trouve $f(a - a') = f(a) - f(a') = f(\Delta(a''))$, ce qui implique, par injectivité de f que $a - a' = \Delta(a'')$. Cela montre que δ_0 est bien définie et on vérifie que c'est un homomorphisme.

En échangeant les rôles de Δ et de N , on a la même preuve pour définir δ_1 .

Regardons l'exactitude de l'hexagone pour les fonctions ayant un indice 0, les autres se déduisent en permutant N et Δ . Cette vérification se fait en 6 étapes :

- i) Puisque $g \circ f = 0$, on a $g_0 \circ f_0 = 0$ ce qui implique que $\text{Im}(f_0) \subset \ker(g_0)$.
- ii) Montrons l'inclusion inverse. Soit $b + N(B) \in \ker(g_0)$. Alors $b \in \ker(\Delta|B)$ et $g(b) \in N(C)$, posons donc $g(b) = N(c)$, $c \in C$. Il faut montrer que $b \equiv f(a) \pmod{N(B)}$, avec $a \in \ker(\Delta|A)$. Il faut

donc trouver $b_0 \in B$ tel que $b = f(a) + N(b_0)$. Soit $b_0 \in B$ tel que $c = g(b_0)$ (g est surjective). On a donc $g(b) = N(c) = N(g(b_0)) = g(N(b_0))$ ce qui veut dire que $b - N(b_0) \in \ker(g) = \text{Im}(f)$. Il existe donc $a \in A$ tel que $b = f(a) + N(b_0)$; appliquant Δ à cette dernière égalité, on trouve $0 = \Delta(f(a)) + 0 = f(\Delta(a))$, ce qui implique (f est injective) que $a \in \ker(\Delta|A)$. On a donc bien $b + N(B) = f(a) + N(B)$, avec $a \in \ker(\Delta|A)$. Cela prouve que $\ker(g_0) \subset \text{Im}(f_0)$.

- iii) Montrons que $\text{Im}(g_0) \subset \ker(\delta_0)$. Il faut appliquer δ_0 à un élément de la forme $g(b) + N(C)$ avec $b \in \ker(\Delta|B)$. Par définition, $\delta_0(g(b) + N(C)) = a + \Delta(A)$, avec $f(a) = \Delta(b) = 0$, donc, $a = 0$, par injectivité de f . Cela prouve que $\delta_0(g(b) + N(C)) = 0 + \Delta(A) \in \ker(\delta_0)$.
- iv) Montrons que $\ker(\delta_0) \subset \text{Im}(g_0)$. Soit $c \in \ker(\Delta|C)$ tel que $c + N(C) \in \ker(\delta_0)$. Cela veut dire qu'il existe $b \in B$ et $a \in A$ tels que $g(b) = c$, $\Delta(b) = f(a)$ et $a \in \Delta(A)$; disons $a = \Delta(a')$, avec $a' \in A$. Il suffit de montrer que $c = g(b')$, avec $\Delta(b') = 0$. On a $\Delta(b) = f(a) = f(\Delta(a')) = \Delta(f(a'))$; posons alors $b' = b - f(a)$. On a $\Delta(b') = 0$ et $g(b') = g(b) = c$, ce qui montre que $c + N(C) = g_0(b' + N(B))$.
- v) Montrons que $\text{Im}(\delta_0) \subset \ker(f_1)$. Soit $c \in \ker(\Delta|C)$. On a $f_1(\delta_0(c + N(C))) = f(a) + \Delta(B)$ où a est tel que $f(a) = \Delta(b)$ et $g(b) = c$; on en déduit donc que $f(a) \in \Delta(B)$ et donc $f_1(\delta_0(c + N(C))) = 0 + \Delta(B)$.
- vi) Il reste à voir que $\ker(f_1) \subset \text{Im}(\delta_0)$. Soit $a \in \ker(N|A)$ tel que $f_1(a + \Delta(a)) = 0$, i.e. tel que $f(a) \in \Delta(B)$. Alors $f(a) = \Delta(b)$ pour un $b \in B$. Posons $c = g(b)$. On a $\Delta(c) = \Delta(g(b)) = g(\Delta(b)) = g(f(a)) = 0$. Donc $c + N(C) \in H^0(C)$ et $\delta_0(c + N(C)) = a + \Delta(A)$.

Cela achève la preuve de ce lemme. #

Lemme (4.2)

Si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ est une composition de deux homomorphismes de G -modules, alors on a $(g \circ f)_i = g_i \circ f_i$ ($i = 0, 1$) et si f est un isomorphisme alors f_i aussi ($i = 0, 1$) (il en est de même pour g). D'autre part, si $A \xrightarrow{f, g} B$ sont des homomorphismes de G -modules, alors $(f + g)_i = f_i + g_i$ ($i = 0, 1$). Enfin, si on a le diagramme commutatif suivant (les deux lignes étant exactes) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow h & & \downarrow i & & \downarrow j \\
 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Alors le prisme à base hexagonale suivant est aussi exact et commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^0(A) & \xrightarrow{f_0} & H^0(B) & & \\
 & \delta_1 \nearrow & \downarrow h_0 & & \downarrow i_0 & \searrow g_0 & \\
 H^1(C) & & H^0(A') & \xrightarrow{f'_0} & H^0(B') & & H^0(C) \\
 & \nwarrow g_1 & & & & \nwarrow \delta_0 & \\
 & j_1 \downarrow & H^1(B) & \xleftarrow{f_1} & H^1(A) & \xrightarrow{g'_0} & H^0(C') \\
 & & \downarrow i_1 & & \downarrow h_1 & & \downarrow j_0 \\
 H^1(C') & & H^1(B') & \xleftarrow{f'_1} & H^1(A') & & H^0(C') \\
 & \nwarrow g'_1 & & & & \nwarrow \delta'_0 & \\
 & & & & & &
 \end{array}$$

Preuve

C'est une conséquence directe des définitions et du Lemme de l'hexagone. #

Définition (4.3)

Soit A un G -module tel que $H^0(A)$ et $H^1(A)$ sont finis. On appelle *quotient de Herbrand* le rapport

$$q(A) = \frac{|H^1(A)|}{|H^0(A)|}$$

Lemme (4.4)

Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ une suite exacte de G -module. Si deux des quotients $q(A), q(B), q(C)$ sont définis, alors le troisième aussi, et dans ce cas, on a

$$q(B) = q(A) \cdot q(C).$$

preuve

Regardons encore une fois le diagramme du Lemme de l'hexagone :

$$\begin{array}{ccccc} & & \delta_1 & H^0(A) & \xrightarrow{f_0} & H^0(B) & \xrightarrow{g_0} & H^0(C) \\ & \nearrow & & & & & & \searrow \\ H^1(C) & & & & & & & \\ & \nwarrow & & & & & & \nearrow \\ & & g_1 & H^1(B) & \xleftarrow{f_1} & H^1(A) & \xleftarrow{\delta_0} & \end{array}$$

Il est clair que par exemple si $q(A)$ et $q(B)$ sont définis, alors $q(C)$ l'est aussi, car $|H^1(C)| = |\ker(\delta_1)| |\operatorname{Im}(\delta_1)| \stackrel{\text{exactitude}}{=} |\operatorname{Im}(g_1)| |\operatorname{Im}(\delta_1)| \leq |H^1(B)| |H^0(A)| < \infty$. On montre de la même manière que $|H^1(C)| < \infty$; donc $q(C)$ est défini. Dans la même veine de raisonnement, on a

$$|H^0(A)| |H^0(C)| |H^1(B)| = |\ker(f_0)| |\operatorname{Im}(f_0)| |\ker(\delta_0)| |\operatorname{Im}(\delta_0)| |\ker(g_1)| |\operatorname{Im}(g_1)|$$

et

$$\begin{aligned} |H^1(A)| |H^1(C)| |H^0(B)| &= |\ker(f_1)| |\operatorname{Im}(f_1)| |\ker(\delta_1)| |\operatorname{Im}(\delta_1)| |\ker(g_0)| |\operatorname{Im}(g_0)| \\ &\stackrel{\text{exactitude}}{=} |\operatorname{Im}(\delta_0)| |\ker(g_1)| |\operatorname{Im}(g_1)| |\ker(f_0)| |\operatorname{Im}(f_0)| |\ker(\delta_0)|. \end{aligned}$$

En quotientant la seconde égalité par la première, on trouve $q(A) \cdot q(C) \cdot q(B)^{-1}$ à gauche et 1 à droite, ce qui montre notre lemme. #

Corollaire (4.5)

Si $A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_n$ est une somme directe de G -modules, alors pour $i = 0, 1$, on a $H^i(A) = H^i(A_1) \oplus \cdots \oplus H^i(A_n)$, ainsi

$$q(A) = \prod_{i=1}^n q(A_i).$$

#

Lemme (4.6)

Si A est un G -module fini, alors $q(A) = 1$

Preuve

On a

$$q(A) = \frac{[\ker(N|A) : \text{Im}(\Delta|A)]}{[\ker(\Delta|A) : \text{Im}(N|A)]} = \frac{|\ker(N|A)|}{|\text{Im}(\Delta|A)|} \cdot \frac{|\text{Im}(N|A)|}{|\ker(\Delta|A)|} = \frac{|A|}{|A|} = 1.$$

≠

Corollaire (4.7)

Soit A un G -module et B un sous- G -module de A tels que $[A : B] < \infty$. Alors $q(A)$ est défini si et seulement si $q(B)$ est défini et alors, $q(A) = q(B)$.

Preuve

On a la suite exacte

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\text{incl.}} A \xrightarrow{\text{proj.}} A/B \longrightarrow 0$$

et on conclut par le Lemme (4.4) et le Lemme (4.6).

≠

Proposition (4.8)

Supposons que $G = \langle \sigma \rangle$, avec $n = |G| = m \cdot d$. Soit R un anneau intègre de caractéristique 0. Soit $A = \bigoplus_{i=1}^d Ru_i$, un R -module de base u_1, \dots, u_d . On suppose que G agit par permutation des u_i de la manière suivante : $u_{i+1} = \sigma(u_i)$, pour $i = 1, \dots, d-1$ et $u_1 = \sigma(u_d)$ (on dira alors que A est un module de permutation). Le R -module A devient ainsi un G -module. On suppose de plus que R/mR est fini. Alors $q(A)$ est défini et

$$q(A) = [R : mR]^{-1}.$$

En particulier, si $R = \mathbb{Z}$, $q(A) = \frac{1}{m}$.

Preuve

Remarquons que $N(\sum_{i=1}^d \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^d \lambda_i N(u_i)$ et que, pour tout $i = 1, \dots, d$, on a $N(u_i) = \sum_{j=0}^{n-1} \sigma^j(u_i) = m \cdot \sum_{j=1}^d u_j$. Ainsi, étant en caractéristique 0, on a :

$$\ker(N|A) = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i u_i \mid \sum_{i=1}^d \lambda_i = 0 \right\} \quad (i)$$

et

$$\text{Im}(N|A) = m \cdot R \cdot \sum_{i=1}^d u_i. \quad (ii)$$

D'autre part, avec la convention que $u_i = u_j$ si $i \equiv j \pmod{d}$, on a $\Delta(\sum_{i=1}^d \lambda_i u_i) = \sum_{i=1}^d \lambda_i (u_i - u_{i+1}) = (\lambda_1 - \lambda_d)u_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)u_2 + \dots + (\lambda_d - \lambda_{d-1})u_d$, alors on a :

$$\ker(\Delta|A) = \left\{ \sum_{i=1}^d \lambda_i u_i \mid \lambda_1 = \dots = \lambda_d \right\} = R \cdot \sum_{i=1}^d u_i \quad (iii)$$

Enfin, tout élément de $\text{Im}(\Delta|A)$ est aussi un élément de $\ker(N|A)$ ($((\lambda_1 - \lambda_d) + (\lambda_2 - \lambda_1) + \cdots + (\lambda_d - \lambda_{d-1})) = 0$). Et réciproquement, si $\sum_{i=1}^d \mu_i u_i \in \ker(N|A)$, on a vu en (i) que $\sum_{i=1}^d \mu_i = 0$, donc en posant $\lambda_i = \sum_{j=1}^i \mu_j$, pour $i = 1, \dots, d$, on a $\mu_i = \lambda_i - \lambda_{i-1}$, avec la convention que $\lambda_0 = 0$ et on a $\sum_{i=1}^d \mu_i u_i = \Delta(\sum_{i=1}^d \lambda_i u_i) \in \text{Im}(\Delta|A)$. Ce qui montre que

$$\text{Im}(\Delta|A) = \ker(N|A) \quad (iv).$$

Par les égalités (ii) et (iii) on trouve que $H^0(A) = \frac{\ker(\Delta|A)}{\text{Im}(N|A)} = R/mR$ et par l'égalité (iv) on a $H^1(A) = \frac{\ker(N|A)}{\text{Im}(\Delta|A)} = \{0\}$. Ainsi $q(A) = \frac{1}{[R:mR]}$. #

Calculs explicites dans le cas d'extensions cycliques

Fixons pour ce paragraphe L/K une extension cyclique de corps de nombres avec $G = \text{Gal}(L/K) = \langle \sigma \rangle$, $|G| = [L : K] = n$. On suppose encore que $[L : \mathbb{Q}] = r + 2s$ et $[K : \mathbb{Q}] = r' + 2s'$, où r (resp. r') est le nombre de plongements réels de L (resp. de K) dans \mathbb{C} , et $2s$ et $2s'$ le nombre de plongements complexes de L (resp. de K) dans \mathbb{C} .

Définitions (4.9)

Soit \mathfrak{p} une place infinie de K (il y en a $r' + s'$). On dit que \mathfrak{p} *ramifie dans* L si elle est réelle et s'il existe une place complexe de L qui prolonge \mathfrak{p} . Comme nous sommes dans un contexte galoisien, c'est donc le cas pour toutes les places de L qui prolongent \mathfrak{p} . Dans ce cas, nous noterons $e_{\mathfrak{p}} = 2$ et $f_{\mathfrak{p}} = 1$. Si \mathfrak{p} est une place infinie non ramifiée, nous noterons $e_{\mathfrak{p}} = f_{\mathfrak{p}} = 1$. Cette définition implique que dans tous les cas (fini ou infini), nous avons

$$n = e_{\mathfrak{p}} \cdot f_{\mathfrak{p}} \cdot r_{\mathfrak{p}},$$

où $r_{\mathfrak{p}}$ est le nombre de places qui prolongent \mathfrak{p} . Le lecteur attentif aura remarqué que si \mathfrak{p} est une place finie et l'extension galoisienne, on note $f_{\mathfrak{p}}$ pour $f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, où \mathfrak{P} est n'importe quel idéal premier au-dessus de \mathfrak{p} , de même pour $e_{\mathfrak{p}}$.

Soit \mathfrak{m} un K -module. Il est clair que les groupes suivants sont de G -modules :

$$L^*, I_L, O_L, U_L, I_L(\tilde{\mathfrak{m}}).$$

(Voir le chapitre 0 pour les définitions). On supposera de plus que \mathfrak{m} est divisible par tous les idéaux premiers qui ramifient dans L . Puisque l'application $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cdot O_L$ est un homomorphisme injectif de $I_K(\mathfrak{m})$ dans $I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$, par abus, on identifiera $I_K(\mathfrak{m})$ avec son image dans $I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$ qui est l'ensemble des idéaux fractionnaires \mathfrak{a} de $I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$ tels que $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. En effet, si \mathfrak{a} est dans l'image de $I_K(\mathfrak{m})$, alors $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$, car $\sigma|_K$ est l'identité. Réciproquement, si $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{P}_i^{a_i}$ est tel que $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$. On peut regrouper les \mathfrak{P}_i qui sont au-dessus d'un même \mathfrak{p} de $\mathbb{P}(K)$. On a donc $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}_i^{a_i} =: \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. Puisque σ permute les \mathfrak{P}_i au-dessus de \mathfrak{p} , on a $\sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$. De plus, puisque G agit transitivement sur les \mathfrak{P}_i au-dessus de \mathfrak{p} , il existe $a_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = (\prod_{\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}_i)^{a_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{p}^{a_{\mathfrak{p}}} \cdot O_L$, car \mathfrak{p} ne ramifie pas dans O_L . Cela montre que \mathfrak{a} est dans l'image de $I_K(\mathfrak{m})$.

Proposition (4.10)

Sous les mêmes notations que précédemment, On a :

- a) $H^0(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) = I_K(\mathfrak{m})/N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$
- b) $H^1(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) = 1$
- c) $H^0(L^*) = K^*/N_{L/K}(L^*)$
- d) $H^1(L^*) = 1$.

Preuve

Prouvons a). Dire que $\mathfrak{a} \in \ker(\Delta|_{I_L(\tilde{\mathfrak{m}})})$ revient à dire que $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$ et donc, en vertu de la remarque qui précède la proposition que $\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{m})$.

Prouvons c). On a $\ker(\Delta|_{L^*}) = \{x \in L^* \mid \Delta(x) = 1\} = \{x \in L^* \mid \sigma(x) = x\} = \{x \in L^* \mid \tau(x) = x \text{ pour tout } \tau \in G\} = \text{Fix}(G)^* = K^*$.

Prouvons d). Dire que $H^1(L^*) = 1$ revient à dire que pour tout $x \in L^*$, si $N_{L/K}(x) = 1$, alors il existe $y \in L^*$ tel que $x = \frac{y}{\sigma(y)}$ et c'est le théorème 90 de Hilbert (cf. Chapitre 0).

Prouvons b). Soit $\mathfrak{a} \in \ker(N|_{I_L(\tilde{\mathfrak{m}})})$. Supposons, comme lors de la remarque précédente que $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ où $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ est le produit de toutes les puissances des idéaux premiers de L au-dessus de \mathfrak{p} . Notons $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \prod_{i=0}^{r-1} \mathfrak{P}_i^{a_i}$ de telle manière que $a_0 \neq 0$ et $\mathfrak{P}_i = \sigma^i(\mathfrak{P}_0)$, pour $i = 0, \dots, r-1$ (si $a_0 = 0$ est inévitable, cela veut dire que $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = O_L$ et on posera pour la suite $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} = O_L$, c'est notamment le cas quand $\mathfrak{p}|\mathfrak{m}$). Remarquons d'abord que $r > 1$. En effet, si $r = 1$, \mathfrak{P}_0 est le seul idéal de L au-dessus de \mathfrak{p} , cela impliquerait que dans la factorisation de $N_{L/K}(\mathfrak{a})$, \mathfrak{p} apparaîtrait avec l'exposant $f(\mathfrak{P}_0|\mathfrak{p}) \cdot a_0 \neq 0$. Cela est impossible puisque $\mathfrak{a} \in \ker(N|_{I_L(\tilde{\mathfrak{m}})})$ veut dire que $N_{L/K}(\mathfrak{a}) = O_K$. D'autre part, et pour la même raison sur l'exposant de \mathfrak{p} , le fait que $N_{L/K}(\mathfrak{a}) = O_K$ implique que $N_{L/K}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) = O_K$ pour tout \mathfrak{p} . Calculons : $O_K = N_{L/K}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}) = \mathfrak{p}^{f_{\mathfrak{p}} \cdot \sum_{i=0}^{r-1} a_i}$, où $f_{\mathfrak{p}} = f(\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p})$ pour tout i . Cela prouve que $\sum_{i=0}^{r-1} a_i = 0$. Posons alors, pour tout $i = 0, \dots, r-1$, $c_i = \sum_{j=0}^i a_j$ et $\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}} = \prod_{i=0}^{r-2} \mathfrak{P}_i^{c_i}$. On a

$$\Delta(\mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) = \frac{\prod_{i=0}^{r-2} \mathfrak{P}_i^{c_i}}{\prod_{i=1}^{r-1} \mathfrak{P}_i^{c_{i-1}}} = \mathfrak{P}_0^{a_0} \mathfrak{P}_1^{a_1} \dots \mathfrak{P}_{r-2}^{a_{r-2}} \mathfrak{P}_{r-1}^{-c_{r-2}} = \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}},$$

car $-c_{r-2} = a_{r-1}$. On a montré donc que $\Delta(\prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{b}_{\mathfrak{p}}) = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{a}$, ce qui veut dire que $\mathfrak{a} \in \Delta(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$ et donc que $\ker(N|_{I_L(\tilde{\mathfrak{m}})}) = \Delta(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$ et $H^1(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) = 1$. #

Définitions (4.11)

On a toujours L/K une extension cyclique de groupe G et \mathfrak{m} un K -module (juste ici, ce n'est pas nécessaire qu'il contienne les premiers qui ramifient). On définit les applications $\iota : L^* \rightarrow I_L$, $\alpha \mapsto \iota(\alpha) = \alpha \cdot O_L$, $j_{\mathfrak{m}} : I_L \rightarrow I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$ par $j_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ si $\mathfrak{P} \nmid \mathfrak{m}$ et $j_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{P}) = O_L$ si $\mathfrak{P}|\mathfrak{m}$ et enfin, $f_{\mathfrak{m}} = j_{\mathfrak{m}} \circ \iota$. Puisque \mathfrak{m} est un K -module, $\iota, j_{\mathfrak{m}}$ et $f_{\mathfrak{m}}$ sont des homomorphismes de G -modules. Posons S l'ensemble des places de L qui divisent \mathfrak{m} et $L^{*S} = \ker(f_{\mathfrak{m}}) = \{\alpha \in L^* \mid \iota(\alpha) \text{ n'est divisible que par des idéaux premiers de } S\}$ (on les nomme parfois les S -unités).

Lemme (4.12)

Sous les même notations et hypothèses, si $q(\ker(j_{\mathfrak{m}}))$ est défini, alors $q(\iota(L^{*S}))$ aussi et ils sont égaux. Si de plus $q(U_L)$ existe (U_L est l'ensemble des unités de O_L) alors $q(L^{*S})$ aussi et on a

$$q(L^{*S}) = q(U_L) \cdot q(\ker(j_m)).$$

Preuve

On a la suite exacte : $1 \rightarrow \iota(L^{*S}) \rightarrow \ker(j_m) \rightarrow C \rightarrow 1$ où

$$C = \ker(j_m)/\iota(L^{*S}) \simeq \ker(j_m)/(\iota(L^*) \cap \ker(j_m)) \stackrel{\text{thm. d'isom}}{\simeq} (\ker(j_m) \cdot \iota(L^*)/\iota(L^*),$$

le dernier terme est un sous-groupe de $I_L/\iota(L^*)$ qui est fini (cf. [Sam, Thm. 2, chap IV, §3, p.71]), ainsi $q(C) = 1$, en vertu du Lemme (4.6) et si $q(\ker(j_m))$ existe alors $q(\iota(L^{*S}))$ aussi et ils sont égaux, en vertu du Corollaire (4.7). On a aussi la suite exacte $1 \rightarrow U_L \xrightarrow{\text{incl.}} L^{*S} \xrightarrow{\iota} \iota(L^{*S}) \rightarrow 1$. Le Lemme (4.4) appliqué à cette suite exacte nous permet de conclure. #

Compléments (bien utile et un peu redondant) sur les places infinies

Soit L/K une extension galoisienne (quelconque) de corps de nombre et \mathfrak{P} une place infinie de L correspondant à un plongement $\varphi : L \rightarrow \mathbb{C}$ (rappelons que $\bar{\varphi}$ est aussi un plongement correspondant à \mathfrak{P} et donc que deux plongements complexes conjugués correspondent à la même place). Si $\sigma \in G$, alors $\sigma(\mathfrak{P})$ est la place qui correspond au plongement $\varphi \circ \sigma^{-1} : L \rightarrow \mathbb{C}$ (ceci pour avoir $\sigma_1(\sigma_2(\mathfrak{P})) = (\sigma_1 \circ \sigma_2)(\mathfrak{P})$). De cette manière, G agit transitivement sur les places infinies de L qui prolongent une même place infinie de K . Soit $|\cdot|_{\mathfrak{P}}$, la valeur absolue qui correspond à \mathfrak{P} ($|x|_{\mathfrak{P}} = |\varphi(x)|$, pour $x \in L$ et $\varphi : L \rightarrow \mathbb{C}$ est le plongement correspondant à \mathfrak{P}). On a alors $|x|_{\sigma(\mathfrak{P})} = |\varphi(\sigma^{-1}(x))| = |\sigma^{-1}(x)|_{\mathfrak{P}}$, autrement dit, $|\sigma(x)|_{\mathfrak{P}} = |x|_{\sigma^{-1}(\mathfrak{P})}$.

D'autre part, le *groupe de décomposition* de \mathfrak{P} , noté $Z(\mathfrak{P})$ est le sous-groupe des éléments de $\text{Gal}(L/K)$ tels que $\sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$, donc tels que $\varphi \circ \sigma^{-1} = \varphi$ ou $\bar{\varphi}$, ainsi ce sous-groupe est d'ordre 1 ou 2. Si $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap K$, alors $|Z(\mathfrak{P})| = 2$ si et seulement si \mathfrak{p} ramifie, en effet, tout plongement de K s'étend en $n = [L : K]$ plongements de L . Si \mathfrak{p} est une place complexe, on aura $2n$ plongements au-dessus, donc n places et $\sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ si et seulement si $\sigma = \text{Id}_L$. Si \mathfrak{p} est une place réelle qui ne ramifie pas (donc qui reste réelle), il y aura aussi n places au dessus et on est dans la même situation. En revanche, si \mathfrak{p} ramifie, il n'y aura que $\frac{n}{2}$ places au-dessus, donc $|Z(\mathfrak{P})| = 2$, car $\text{Gal}(L/K)$ agit transitivement sur toutes les places au-dessus de \mathfrak{p} . Remarquons, qu'ainsi $|Z(\mathfrak{P})| = e_{\mathfrak{p}} \cdot f_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$, comme pour les places finies.

Fin des compléments

Théorème (4.13)(Minkowski, si $K = \mathbb{Q}$, 1900), (Herbrand, général, 1930)

Soit L/K une extension galoisienne (quelconque) de groupe G et $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_{r+s}$ les places infinies de L (les r premières étant réelles, les s suivantes étant complexes). Alors il existe $\omega_1, \dots, \omega_{r+s} \in U_L$ tels que :

- a) G permute les ω_i de la même manière qu'il permute les \mathfrak{P}_i ($\omega_i \leftrightarrow \mathfrak{P}_i$ est un homomorphisme de G -ensemble).
- b) On a $\omega_1 \cdots \omega_{r+s} = 1$ et c'est la seule relation (sur \mathbb{Z} entre les ω_i), cela veut dire que si on prend $r+s-1$ ω_i , il sont linéairement indépendants sur \mathbb{Z} , ou encore $\omega_1^{a_1} \cdots \omega_{r+s}^{a_{r+s}} = 1 \Leftrightarrow a_1 = \cdots = a_{r+s}$.
- c) Si W est le sous- \mathbb{Z} -module engendré par les ω_i , alors W est un G -module d'indice fini dans U_L .

Preuve

Il est clair que $c)$ découle de $b)$ par le théorème des unités de Dirichlet (cf. Chapitre 0).

Montrons $a)$. Soit \mathfrak{p} une place infinie de K et choisissons \mathfrak{P} une place de L qui prolonge \mathfrak{p} . En regardant la preuve classique du théorème des unités de Dirichlet (cf. [Sam, Thm. 1, chap. IV, §4, p.72]), on peut trouver un élément $\omega'_{\mathfrak{P}}$ dans U_L tel que $|\omega'_{\mathfrak{P}}|_{\Omega} < 1$ pour toute place infinie $\Omega \neq \mathfrak{P}$ de L . Posons encore $\omega''_{\mathfrak{P}} = \prod_{\tau \in Z(\mathfrak{P})} \tau(\omega'_{\mathfrak{P}})$. Si Ω est une place infinie de L différente de \mathfrak{P} , alors on a

$$|\omega''_{\mathfrak{P}}|_{\Omega} = \prod_{\tau \in Z(\mathfrak{P})} |\tau(\omega'_{\mathfrak{P}})|_{\Omega} = \prod_{\tau \in Z(\mathfrak{P})} |\omega'_{\mathfrak{P}}|_{\tau^{-1}(\Omega)} < 1,$$

car $\tau^{-1}(\Omega) \neq \mathfrak{P}$ si $\tau \in Z(\mathfrak{P})$. Soit maintenant Ω une place infinie de L au-dessus de \mathfrak{p} . On choisit $\rho \in G$ tel que $\rho(\mathfrak{P}) = \Omega$ et on pose $\omega''_{\Omega} = \rho(\omega''_{\mathfrak{P}})$; c'est indépendant du choix de ρ , car $\omega''_{\mathfrak{P}}$ est invariant par $Z(\mathfrak{P})$. Si Ω une place infinie de L au-dessus de \mathfrak{p} différente de \mathfrak{P} , et si \mathfrak{R} est une place infinie de L différente de Ω , alors

$$|\omega''_{\Omega}|_{\mathfrak{R}} = |\rho(\omega''_{\mathfrak{P}})|_{\mathfrak{R}} = |\omega_{\mathfrak{P}}|_{\rho^{-1}(\mathfrak{R})} < 1.$$

En procédant ainsi pour chaque place infinie de K , on obtient des $\omega''_1, \dots, \omega''_{r+s} \in U_L$ qui sont permutés par G de la même manière que les $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_{r+s}$. On a en outre que $\rho_1(\rho_2(\omega''_{\mathfrak{P}})) = (\rho_1\rho_2)(\omega''_{\mathfrak{P}})$, faisant de l'application $\mathfrak{P}_i \mapsto \omega''_{\mathfrak{P}_i} := \omega''_i$ un isomorphisme de G -ensemble. Puisque $|\omega''_i|_{\mathfrak{P}_j} < 1$ pour $i \neq j$, tout choix de $r+s-1$ quelconque des ω''_i sont toujours \mathbb{Z} -linéairement indépendants (cf. preuve du théorème de Dirichlet). Notons $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_{r'+s'}$ les places infinies de K et pour chaque $i = 1, \dots, r'+s'$, soit $v_i := \prod_{\mathfrak{P}_j | \mathfrak{p}_i} \omega''_j$. Alors $v_1, \dots, v_{r'+s'} \in U_K$, car ils sont invariants par G . Comme U_K est de rang $r'+s'-1$ sur \mathbb{Z} , il existe $a_1, \dots, a_{r'+s'} \in \mathbb{Z}$ tels que $\prod_{i=1}^{r'+s'} v_i^{a_i} = 1$. Ces a_i sont tous non nuls, car $r'+s'-1$ quelconques des $v_1, \dots, v_{r'+s'}$ sont linéairement indépendants. On remplace les ω''_i par $\omega_i := \omega''_i^{a_j}$ où $\mathfrak{P}_i | \mathfrak{p}_j$ pour $1 \leq i \leq r+s$. On a maintenant $\prod_{i=1}^{r+s} \omega_i = 1$; et par choix des a_i , les ω_i sont permutés de la même manière que les \mathfrak{P}_i (c'est pour ça qu'on a du faire une incursion par les v_i). Et c'est la seule relation car $r+s-1$ parmi les ω_i sont linéairement indépendants. \neq

Lemme (4.14)

Si L/K est une extension cyclique, alors le quotient de Herbrand de U_L vaut

$$q(U_L) = \frac{[L : K]}{2^{r_0}},$$

où r_0 est le nombre de places infinies de K qui ramifient dans L .

Preuve

Posons W le G -module engendré par les ω_i du théorème précédent. Pour chaque place infinie \mathfrak{p} de K , on forme (abstraitement) le \mathbb{Z} -module libre $A_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{i=1}^{r_{\mathfrak{p}}} \mathbb{Z} u_{\mathfrak{p},i}$ où $r_{\mathfrak{p}}$ est le nombre de places infinies de L qui prolongent \mathfrak{p} . Puis, $A = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\infty}(K)} A_{\mathfrak{p}}$. On fait agir G de telle manière que chaque $A_{\mathfrak{p}}$ est un module de permutation (cf. Proposition (4.8)), donc G agit transitivement sur les $u_{\mathfrak{p},i}$, c'est possible, puisque $r_{\mathfrak{p}}$ divise $[L : K] = |G|$. On considère le G -homomorphisme $A \rightarrow W$ défini en envoyant les $u_{\mathfrak{p},i}$ sur les ω_i de manière cohérente avec l'action de G . C'est un homomorphisme surjectif de noyau $\mathbb{Z} \cdot (\sum_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\infty}(K)} \sum_{i=1}^{r_{\mathfrak{p}}} u_{\mathfrak{p},i}) = \mathbb{Z}$ avec l'action triviale de G . En bref, on a la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow A \rightarrow W \rightarrow 1.$$

Or, \mathbb{Z} est un module de permutation (au sens de la Proposition (4.8), avec le $d = 1$). Donc, $q(\mathbb{Z})$ existe et vaut $q(\mathbb{Z}) = \frac{1}{[L:K]}$. D'autre part, $A = \bigoplus A_{\mathfrak{p}}$, et chaque $A_{\mathfrak{p}}$ est un module de permutation (avec $d = r_{\mathfrak{p}}$), donc, $q(A_{\mathfrak{p}})$ existe et en vertu du Corollaire (4.6), $q(A) = \prod_{\mathfrak{p}} q(A_{\mathfrak{p}})$. En outre, puisque $[L : K] = r_{\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}$, on a $q(A_{\mathfrak{p}}) = \frac{r_{\mathfrak{p}}}{[L:K]} = \frac{1}{e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}} = \frac{1}{|Z(\mathfrak{P})|}$ pour $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. Mais, on a vu lors du rappel bien utile que $|Z(\mathfrak{P})| = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{p} \text{ ne ramifie pas dans } L \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi,

$$q(A) = \frac{1}{2^{r_0}}$$

où r_0 est le nombre de place infinies de K qui ramifient dans L . Enfin, puisque W est d'indice fini dans U_L (partie c) du Théorème (4.13)), en vertu du Corollaire (4.7) et du Lemme (4.4), on a

$$q(U_L) = q(W) = \frac{q(A)}{q(\mathbb{Z})} = \frac{[L : K]}{2^{r_0}}.$$

#

Théorème (4.15)

Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres. Soit $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}_{\infty}$ un K -module tel que \mathfrak{m}_{∞} contienne toutes les places infinies de K qui ramifient dans L . Soit S l'ensemble de places de L qui divisent \mathfrak{m} . Alors $q(L^{*S})$ existe et vaut

$$q(L^{*S}) = [L : K] \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} \frac{1}{e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}}.$$

Preuve

On a montré au Lemme (4.12), que si $q(U_L)$ et $q(\ker(j_{\mathfrak{m}}))$ existaient, alors $q(L^{*S})$ aussi et que $q(L^{*S}) = q(U_L) \cdot q(\ker(j_{\mathfrak{m}}))$. On a montré au Lemme (4.14) que $q(U_L)$ existait et valait $\frac{[L:K]}{2^{r_0}}$. Il suffit donc de calculer $q(\ker(j_{\mathfrak{m}}))$; et c'est le plus facile à voir :

Par définition, $\ker(j_{\mathfrak{m}})$ est le groupe abélien libre engendré par les idéaux premiers de L qui sont dans S . Notons $A(\mathfrak{p})$ le groupe abélien libre engendré par les idéaux premiers de L qui sont au-dessus de \mathfrak{p} . Alors $A(\mathfrak{p})$ est un sous- G -module de $\ker(j_{\mathfrak{m}})$ et $\ker(j_{\mathfrak{m}}) = \bigoplus_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} A(\mathfrak{p})$. Chaque $A(\mathfrak{p})$ est un module de permutation (au sens de la Proposition (4.8), avec $d = r_{\mathfrak{p}}$) et G agit transitivement sur la base formée des idéaux premiers de L au-dessus de \mathfrak{p} . A nouveau, puisque $[L : K] = r_{\mathfrak{p}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}$, la Proposition (4.8) nous montre $q(A(\mathfrak{p}))$ existe et vaut $\frac{1}{e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}}$. Donc, en vertu du Corollaire (4.5), on a $q(\ker(j_{\mathfrak{m}}))$ existe et vaut

$$q(\ker(j_{\mathfrak{m}})) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} q(A(\mathfrak{p})) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} \frac{1}{e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}}.$$

Enfin, en se souvenant que $2^{r_0} = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_{\infty}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}$, on trouve

$$q(L^{*S}) = q(U_L) \cdot q(\ker(j_{\mathfrak{m}})) = [L : K] \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_{\infty}} \frac{1}{e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} \frac{1}{e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}} = [L : K] \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} \frac{1}{e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}}.$$

#

Chapitre 5 :

Un calcul d'indice

Dans ce chapitre, nous allons calculer (comme son nom l'indique) un indice. Cet indice paraît sorti de nulle part, mais il sera crucial pour prouver l'égalité fondamentale du corps de classe au chapitre suivant; et cette dernière sera une des briques importantes pour démontrer la réciprocity d'Artin. Ici, le lecteur ferait bien de se souvenir des définitions faites au Chapitre 0 sur les K -modules aux pages 7 et suivantes.

Définition (5.1)

Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres de groupe $G = \langle \sigma \rangle$. Posons $N = N_{L/K}$ la norme de L sur K . Soit \mathfrak{m} un K -module. On pose

$$a(\mathfrak{m}) = [K^* : N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^*]$$

où, on le rappelle, $K_{\mathfrak{m}}^* = \{x \in K^* \mid x \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}\}$.

Lemme (5.2)

Soit L/K une extension quelconque de corps de nombres, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}_{\infty}$ un K -module et $\tilde{\mathfrak{m}} = \tilde{\mathfrak{m}}_0 \cdot \tilde{\mathfrak{m}}_{\infty}$, le L -module engendré par \mathfrak{m} . Alors on a

a) $L_{\tilde{\mathfrak{m}}_0}^* \cap K = K_{\mathfrak{m}_0}^*$.

b)

$$N(L_{\tilde{\mathfrak{m}}}^*) \subset K_{\mathfrak{m}}^*.$$

Preuve

Prouvons a). L'inclusion \supset est évidente. Prouvons l'autre inclusion. Soit $\alpha \in L_{\tilde{\mathfrak{m}}_0}^* \cap K$ et soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ tel que $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0$. Posons $n = n_{\mathfrak{p}}$ l'exposant de \mathfrak{p} dans \mathfrak{m} . Soit $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}(L)$ tel que $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$. Alors l'exposant de \mathfrak{P} dans $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ vaut $n \cdot e$, où $e = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ est l'indice de ramification de $\mathfrak{P}/\mathfrak{p}$. Dire que $\alpha \in L_{\tilde{\mathfrak{m}}_0}^* \cap K$ implique que $\alpha = 1 + x$, avec $x \in K$ et $v_{\mathfrak{P}}(x) \geq n \cdot e$. Or, il est évident que $v_{\mathfrak{p}}(x) = e \cdot v_{\mathfrak{P}}(x)$. Donc $v_{\mathfrak{p}}(x) \geq n$, ce qui veut dire que $\alpha = 1 + x \in K_{\mathfrak{p}^n}^*$, ceci pour tout $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0$. Donc $\alpha \in \cap_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}_0} K_{\mathfrak{p}^n}^* = K_{\mathfrak{m}_0}^*$. Remarquons que si on remplace \mathfrak{m}_0 par \mathfrak{m} avec d'éventuelles places à l'infini, cette égalité est fausse si une des places infinie divisant \mathfrak{m} devient complexe partout par exemple.

Prouvons b). Soit $x \in L_{\tilde{\mathfrak{m}}}^*$. Si $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$ est une place infinie (donc réelle) correspondant à un plongement $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}$. Soient $\sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \bar{\sigma}_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s}, \bar{\sigma}_{r+s}$ les extensions de σ en plongements de L dans \mathbb{C} tels que $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ soient réelles et les autres complexes. Alors $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ correspondent aux places infinies $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ qui divisent $\tilde{\mathfrak{m}}$, donc $\sigma_i(x) > 0$ pour $i = 1, \dots, r$, et donc

$$\sigma(N(x)) = \prod_{i=1}^r \sigma_i(x) \cdot \prod_{j=1}^s \sigma_{r+j} \cdot \bar{\sigma}_{r+j} > 0,$$

ce qui montre que $N(L_{\tilde{\mathfrak{m}}}^*) \subset K_{\mathfrak{m}_{\infty}}^*$. Regardons maintenant le cas des places finies. Soit E/L l'enveloppe galoisienne de L/K (c'est-à-dire la plus petite extension galoisienne E/K qui contienne L). Si $G = \text{Gal}(E/K)$ et $H = \text{Gal}(E/L)$, on a $N(x) = \prod_{\sigma} \sigma(x)$, où σ parcourt un système de représentants de classe

de G modulo H (à gauche). Soit $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ le E -module engendré par \mathfrak{m}_0 . Puisque $x \in L_{\mathfrak{m}_0}^* \subset E_{\tilde{\mathfrak{m}}_0}^*$ et que $\tilde{\mathfrak{m}}_0$ est invariant par G , on a aussi $\sigma(x) \in E_{\tilde{\mathfrak{m}}_0}^*$ pour tout $\sigma \in G$. Ainsi, $N(x) = \prod_{\sigma} \sigma(x) \in E_{\tilde{\mathfrak{m}}_0}^* \cap K \stackrel{a)}{=} K_{\mathfrak{m}_0}^*$. Et cela montre que $N(L_{\mathfrak{m}}^*) \subset K_{\mathfrak{m}_\infty}^* \cap K_{\mathfrak{m}_0}^* = K_{\mathfrak{m}}^*$. \neq

Lemme (5.3)

Si \mathfrak{m} et \mathfrak{n} sont des K -modules premiers entre eux, alors on a :

$$a(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) = a(\mathfrak{m}) \cdot a(\mathfrak{n}).$$

Preuve

On se souvient (Corollaire (0.4)) de l'isomorphisme : $K^*/K_{\mathfrak{mn}}^* \rightarrow K^*/K_{\mathfrak{m}}^* \times K^*/K_{\mathfrak{n}}^*$. Le passage au quotient induit un homomorphisme surjectif

$$f : K^*/K_{\mathfrak{mn}} \rightarrow K^*/(N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^*) \times K^*/(N(L)K_{\mathfrak{n}}^*).$$

Pour prouver le lemme, il suffit de montrer que $\ker(f) = N(L^*)K_{\mathfrak{mn}}^*/K_{\mathfrak{mn}}^*$. Puisque $K_{\mathfrak{m}}^* \cap K_{\mathfrak{n}}^* = K_{\mathfrak{mn}}^*$, il est évident que $N(L^*)K_{\mathfrak{mn}}^*/K_{\mathfrak{mn}}^* \subset \ker(f)$. Réciproquement, soit $\alpha \cdot K_{\mathfrak{mn}}^* \in \ker(f)$. On a donc $\alpha \cdot K_{\mathfrak{m}}^* \subset N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^*$ et $\alpha \cdot K_{\mathfrak{n}}^* \subset N(L^*)K_{\mathfrak{n}}^*$. Cela veut dire qu'il existe $\beta_1, \beta_2 \in L^*$ tels que $\alpha \equiv N(\beta_1) \pmod{K_{\mathfrak{m}}^*}$ et $\alpha \equiv N(\beta_2) \pmod{K_{\mathfrak{n}}^*}$. Puisque \mathfrak{m} et \mathfrak{n} sont premiers entre eux, $\tilde{\mathfrak{m}}$ et $\tilde{\mathfrak{n}}$ le sont aussi. En vertu du Théorème d'approximation débile (cf. Théorème (0.3)), il existe $\beta \in L^*$ tel que $\beta \equiv \beta_1 \pmod{K_{\tilde{\mathfrak{m}}}^*}$ et $\beta \equiv \beta_2 \pmod{K_{\tilde{\mathfrak{n}}}^*}$, c'est-à-dire $\beta \cdot \beta_1^{-1} \in L_{\tilde{\mathfrak{m}}}^*$ et $\beta \cdot \beta_2^{-1} \in L_{\tilde{\mathfrak{n}}}^*$. Puisque $N(L_{\tilde{\mathfrak{m}}}^*) \subset K_{\mathfrak{m}}^*$ (et idem pour \mathfrak{n}) (cf. lemme précédent), on a alors $N(\beta) \equiv N(\beta_1) \pmod{K_{\mathfrak{m}}^*}$ et $N(\beta) \equiv N(\beta_2) \pmod{K_{\mathfrak{n}}^*}$, ainsi, $\alpha \equiv N(\beta) \pmod{K_{\mathfrak{m}}^*}$ et $\pmod{K_{\mathfrak{n}}^*}$, donc (à nouveau grâce au théorème d'approximation débile) $\alpha \equiv N(\beta) \pmod{K_{\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}}^*}$; ce qui montre que $\alpha \in N(L^*) \cdot K_{\mathfrak{mn}}^*$ et le théorème est prouvé. \neq

En vertu du lemme qu'on vient de voir, le calcul de $a(\mathfrak{m})$ se réduit au cas où $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^m$ avec $m \geq 1$ entier pour les places finies et $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ pour les places infinies.

Lemme (5.4)

Si \mathfrak{p} est une place infinie réelle et $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$, alors

$$a(\mathfrak{m}) = e_{\mathfrak{p}} = e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}.$$

(voir Définitions (4.9)).

preuve

Si φ est le plongement correspondant à \mathfrak{p} , alors $K_{\mathfrak{m}}^*$ est le noyau de l'application surjective

$$K^* \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{nat.}} \mathbb{R}^*/\mathbb{R}_+^* = \{\pm 1\}.$$

Ainsi, $[K^* : K_{\mathfrak{m}}^*] = 2$.

Supposons que \mathfrak{p} ramifie dans L . Soit $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ les places de L qui prolongent \mathfrak{p} . Puisque \mathfrak{p} ramifie, elles sont toutes complexes et $r = \frac{n}{2}$, où $n = [L : K]$. Soit $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ les plongements correspondants

aux \mathfrak{P}_i . Alors, pour tout $x \in L^*$, on a $\varphi(N(x)) = \prod_{i=1}^r \sigma_i(x) \overline{\sigma_i(x)} > 0$. Donc, $N(L^*) \subset K_{\mathfrak{m}}^*$, et donc $N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^* = K_{\mathfrak{m}}^*$, donc $a(\mathfrak{m}) = 2 = e_{\mathfrak{p}}$.

Supposons que \mathfrak{p} ne ramifie pas dans L . A nouveau $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ sont les places de L qui prolongent \mathfrak{p} et $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ les plongements correspondants; dans ce cas, $r = n$ et $\varphi(N(x)) = \prod_{i=1}^r \sigma_i(x)$. Par le théorème d'approximation débile, il est possible de trouver $x \in L^*$ tel que $\sigma_1(x) < 0$ et $\sigma_i(x) > 0$, pour $i = 2, \dots, r$. Cela prouve que $N(L^*) \not\subset K_{\mathfrak{m}}^*$, ce qui montre que $N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^* = K^*$ et donc $a(\mathfrak{m}) = 1 = e_{\mathfrak{p}}$. ~~///~~

Passons aux places finies :

Tout d'abord un petit lemme gentil :

Lemme (5.5)

Soit A un anneau de Dedekind ne possédant qu'un nombre fini d'idéaux premiers. Alors A est principal

Preuve

Soit \mathfrak{a} un idéal de A . Puisque A est de Dedekind, il existe des idéaux premiers $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$ et des r_1, \dots, r_s uniques tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{r_s}$. Pour $i = 1, \dots, s$, fixons $a_i \in \mathfrak{p}_i^{r_i} \setminus \mathfrak{p}_i^{r_i+1}$; c'est possible dans un anneau de Dedekind (si $\mathfrak{p}_i^{r_i} = \mathfrak{p}_i^{r_i+1}$, alors $O_K = \mathfrak{p}_i \dots$). Par le théorème chinois, il existe $a \in A$ tel que $a \equiv a_i \pmod{\mathfrak{p}_i^{r_i+1}}$, pour tout $i = 1, \dots, s$. Alors on a $aA = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_s^{r_s} = \mathfrak{a}$, car pour tout idéal premier de A , on a $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = v_{\mathfrak{p}}(a) = v_{\mathfrak{p}}(aA)$. ~~///~~

Lemme (5.6)

Soit \mathfrak{p} une place finie et $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^m$ ($m \geq 1$). Alors

- a) $[K^* : N(L^*) \cdot K^*(\mathfrak{m})] = f_{\mathfrak{p}}$
- b) $a(\mathfrak{m}) = f_{\mathfrak{p}} \cdot [K^*(\mathfrak{m}) : (K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*)) \cdot K_{\mathfrak{m}}^*]$.

Preuve

Montrons que b) découle de a). On a $a(\mathfrak{m}) = [K^* : N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^*] = [K^* : N(L^*)K^*(\mathfrak{m})][N(L^*)K^*(\mathfrak{m}) : N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^*] \stackrel{\text{a)}}{=} f_{\mathfrak{p}} \cdot [N(L^*)K^*(\mathfrak{m}) : N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^*]$. L'application (qui est l'inclusion) $K^*(\mathfrak{m}) \rightarrow N(L^*)K^*(\mathfrak{m})$ donne un isomorphisme

$$K^*(\mathfrak{m})/K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^* \longrightarrow N(L^*)K^*(\mathfrak{m})/N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^*.$$

Et, finalement, puisque $K_{\mathfrak{m}}^* \subset K^*(\mathfrak{m})$, on a

$$K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^* = K^*(\mathfrak{m})K_{\mathfrak{m}}^* \cap N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^* = (K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*)) \cdot K_{\mathfrak{m}}^*$$

ce qui montre la partie b).

Montrons la partie a). Pour simplifier l'écriture, notons $R = O_K$ et $R_{(\mathfrak{p})}$ le localisé de R en \mathfrak{p} . Il est bien connu que $R_{(\mathfrak{p})}$ est un anneau de valuation discrète (c'est une des propriétés fondamentale des anneaux de Dedekind), donc local et principal. Notons π , l'uniformisante de $R_{(\mathfrak{p})}$, c'est-à-dire l'élément qui engendre $\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$, l'unique idéal maximal de $R_{(\mathfrak{p})}$. On remarque que dans notre cas, $K^*(\mathfrak{m}) = R_{(\mathfrak{p})}^*$. Ainsi, tout élément x de K^* s'écrit de manière unique $x = u \cdot \pi^k$, avec $u \in K^*(\mathfrak{m})$ et $k \in \mathbb{Z}$. Ce qui montre que K^* est en bijection avec $\mathbb{Z} \times K^*(\mathfrak{m})$. Notons maintenant $T = O_L$ et $T_{(\mathfrak{p})} = (R - \mathfrak{p})^{-1} \cdot T$. L'ensemble des idéaux premiers de $T_{(\mathfrak{p})}$ est en bijection avec les idéaux de T qui ne rencontrent pas $(R - \mathfrak{p})$. Ainsi,

si $\mathfrak{P}_1, \dots, \mathfrak{P}_r$ sont les idéaux de T au-dessus de \mathfrak{p} , alors $\mathfrak{P}_1 T_{(\mathfrak{p})}, \dots, \mathfrak{P}_r T_{(\mathfrak{p})}$ est l'ensemble des idéaux premiers de $T_{(\mathfrak{p})}$. D'autre part, puisque T est un anneau de Dedekind, alors $T_{(\mathfrak{p})}$ l'est aussi. Donc, il est principal (cf. Lemme (5.5)). Posons $\mathfrak{P}_i T_{(\mathfrak{p})} = (\pi_i)$, pour $i = 1, \dots, r$. Ainsi, chaque élément de L^* s'écrit $v \cdot \pi_1^{k_1} \cdots \pi_r^{k_r}$, avec $v \in T_{(\mathfrak{p})}^*$ et $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$. Si $f = f(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}) = f_{\mathfrak{p}}$, alors on a $N(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{p}^f$, $i = 1, \dots, r$, et donc $N(\pi_i) = u_i \cdot \pi_i^f$, avec $u_i \in R_{(\mathfrak{p})}^* = K^*(\mathfrak{m})$. On en déduit que

$$N(L^*) \cdot K^*(\mathfrak{m}) = \{\pi^{fk} \mid k \in \mathbb{Z}\} \cdot K^*(\mathfrak{m}) \simeq f\mathbb{Z} \times K^*(\mathfrak{m}).$$

D'où $[K^* : N(L^*) \cdot K^*(\mathfrak{m})] = [\mathbb{Z} \times K^*(\mathfrak{m}) : f\mathbb{Z} \times K^*(\mathfrak{m})] = f = f_{\mathfrak{p}}$. #

Définition (5.7)

Mettons-nous sous les mêmes hypothèses que précédemment, c'est-à-dire L/K est une extension cyclique de corps de nombres de groupe de Galois G , de cardinal n . On prend \mathfrak{p} une place finie et on considère le K -module $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Soit \mathfrak{P} une place de L au-dessus de \mathfrak{p} . Nous notons $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$ les corps locaux associés aux places \mathfrak{p} et \mathfrak{P} respectivement. L'extension $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ est aussi cyclique de groupe de Galois canoniquement isomorphe à $Z(\mathfrak{P}) = \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\}$ de cardinal $e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} := n_{\mathfrak{p}}$ [cf. Fr-Tay Th. 21, p.118]. Notons encore $O_{\mathfrak{p}} = O_{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}$ l'anneau de valuation de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ et $O_{\mathfrak{P}}$ celui de $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$. Soit $\widehat{\mathfrak{p}}$ l'unique idéal maximal de $O_{\mathfrak{p}}$ et $\widehat{\mathfrak{P}}$ celui de $O_{\mathfrak{P}}$. On note $O_{(\mathfrak{p})} := O_{\mathfrak{p}} \cap K$ le localisé de O_K en \mathfrak{p} (avant on l'avait noté R , mais c'était parce qu'on avait besoin de T ...) et $O_{(\mathfrak{P})} := O_{\mathfrak{P}} \cap L$ le localisé de O_L en \mathfrak{P} . L'idéal maximal de $O_{(\mathfrak{p})}$ se note $\widetilde{\mathfrak{p}}$ et celui de $O_{(\mathfrak{P})}$ se note $\widetilde{\mathfrak{P}}$. Les unités de $O_{\mathfrak{p}}$ devraient se noter $O_{\mathfrak{p}}^*$, mais se notent $U_{\mathfrak{p}}$ (attention de ne pas confondre avec le $U_{\mathfrak{m}}$ de la Définition (0.8) et du Théorème (0.12)) et celles de $O_{\mathfrak{P}}$ se notent $U_{\mathfrak{P}}$, les unités de $O_{(\mathfrak{p})}$ devraient se noter $U_{(\mathfrak{p})}$ ou $O_{(\mathfrak{p})}^*$, mais dans notre cas, c'est $K^*(\mathfrak{m})$, où $\mathfrak{m} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{m}_{\infty}$. Enfin, pour $k \in \mathbb{N}$, on écrit $U_{\mathfrak{p}}^{(k)}$ pour $1 + \widehat{\mathfrak{p}}^k \subset 1 + \widehat{\mathfrak{p}} \subset U_{\mathfrak{p}}$, car $\widehat{\mathfrak{p}}$ est le seul idéal maximal de $O_{\mathfrak{p}}$. On a aussi $\mathfrak{p}O_{(\mathfrak{p})} = \widetilde{\mathfrak{p}}$ et $\mathfrak{p}O_{\mathfrak{p}} = \widetilde{\mathfrak{p}}O_{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{p}}$ et $O_K/\mathfrak{p}^k \simeq O_{(\mathfrak{p})}/\widetilde{\mathfrak{p}}^k \simeq O_{\mathfrak{p}}/\widehat{\mathfrak{p}}^k$ [cf. Fr-Tay Th. 11 + Cor, p.77]. La norme $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}$ sera notée $N_{\mathfrak{p}}$ ou même N s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Nous avons aussi besoin d'étendre la définition de (mod^*) sur $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$: si $x, y \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$ et $n > 0$ est un entier, alors on dit que $x \equiv y \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^n}$ si $\frac{x-y}{y} \in \widehat{\mathfrak{p}}^n$. Sur $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$ on définit cette équivalence de la même manière.

Avec tout ce petit monde, nous sommes prêt à énoncer le lemme suivant

Lemme (5.8)

Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres, $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 0$ et $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^m$ un K -module. Alors on a

$$K^*(\mathfrak{m})/(K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*))K_{\mathfrak{m}}^* \simeq U_{\mathfrak{p}}/N(U_{\mathfrak{P}})U_{\mathfrak{p}}^{(m)}$$

où \mathfrak{P} est un idéal premier de L au-dessus de \mathfrak{p} .

Preuve

Rappelons le fait élémentaire suivant : tout homomorphisme d'anneau $f : A \rightarrow B$ définit un homomorphisme de groupe $f^* : A^* \rightarrow B^*$ tel que $\ker(f^*) = (1 + \ker(f)) \cap A^*$. L'homomorphisme surjectif $O_{(\mathfrak{p})} \rightarrow O_{(\mathfrak{p})}/\widetilde{\mathfrak{p}}^m$ induit donc un homomorphisme $O_{(\mathfrak{p})}^* = K^*(\mathfrak{m}) \rightarrow (O_{(\mathfrak{p})}/\widetilde{\mathfrak{p}}^m)^*$. Puisque $O_{(\mathfrak{p})}$ est local,

alors $1 + \widehat{\mathfrak{p}}^m \subset K^*(\mathfrak{m})$, donc cet homomorphisme est surjectif. On a aussi $(O_{(\mathfrak{p})}/\widehat{\mathfrak{p}}^m)^* \simeq (O_{\mathfrak{p}}/\widehat{\mathfrak{p}}^m)^* = U_{\mathfrak{p}}/(1 + \widehat{\mathfrak{p}}^m) = U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(m)}$ (l'avant dernière égalité vient aussi du fait que $O_{\mathfrak{p}}$ est local). En particulier l'homomorphisme

$$\begin{aligned} f : K^*(\mathfrak{m}) &\longrightarrow U_{\mathfrak{p}}/N(U_{\mathfrak{p}})U_{\mathfrak{p}}^{(m)} \\ x &\longmapsto x N(U_{\mathfrak{p}})U_{\mathfrak{p}}^{(m)} \end{aligned}$$

est surjectif. Il nous reste à faire la preuve que $\ker(f) = (K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*))K_{\mathfrak{m}}^*$.

En regardant les définitions, on observe que $K_{\mathfrak{m}}^* = 1 + \widehat{\mathfrak{p}}^m \subset 1 + \widehat{\mathfrak{p}}^m = U_{\mathfrak{p}}^{(m)}$. Donc, $K_{\mathfrak{m}}^* \subset \ker(f)$. Soit $\alpha \in L^*$ est tel que $N_{L/K}(\alpha) \in K^*(\mathfrak{m})$, alors $v_{\mathfrak{p}}(N_{L/K}(\alpha)) = 0$, (voir le paragraphe suivant ou le Chapitre 0 pour se remémorer la définition de $v_{\mathfrak{p}}$); cela implique que $v_{\mathfrak{P}_i}(\alpha) = 0$ pour tout idéal \mathfrak{P}_i de L au-dessus de \mathfrak{p} , donc que $\alpha \in L^*(\widetilde{\mathfrak{m}})$ (se souvenir de la définition de $\widetilde{\mathfrak{m}}$). Soit τ_1, \dots, τ_r un système de représentant de G modulo $Z(\mathfrak{P})$. Alors

$$N_{L/K}(\alpha) = \prod_{\tau \in Z(\mathfrak{P})} \prod_{i=1}^r \tau_i \tau(\alpha) = \prod_{\tau \in Z(\mathfrak{P})} \tau \left(\prod_{i=1}^r \tau_i(\alpha) \right) = N_{\mathfrak{p}} \left(\prod_{i=1}^r \tau_i(\alpha) \right),$$

et $\prod_{i=1}^r \tau_i(\alpha) \in L^*(\widetilde{\mathfrak{m}}) \subset U_{\mathfrak{p}}$. On a donc montré que $K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*) \subset N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{p}}) \cap K^* \subset \ker(f)$. Et ainsi $(K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*))K_{\mathfrak{m}}^* \subset \ker(f)$.

Montrons l'autre inclusion : soit donc $\alpha \in \ker(f)$. Il existe donc $\beta \in U_{\mathfrak{p}}$ tel que $\alpha N_{\mathfrak{p}}(\beta)^{-1} \in U_{\mathfrak{p}}^{(m)}$. Soient $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_r$ les idéaux premiers de L au-dessus de \mathfrak{p} . Comme L^* est dense dans $\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}$, il existe $\beta_0 \in L^*$ tel que $\beta_0 \equiv \beta \pmod{\widehat{\mathfrak{P}}^{me}}$, où $e = e_{\mathfrak{p}}$ et $x \equiv y \pmod{\widehat{\mathfrak{P}}^{me}}$ veut dire par extension que $\frac{x}{y} \in 1 + \widehat{\mathfrak{P}}^{me}$. Le théorème chinois pour O_L nous assure l'existence d'un $\gamma \in L^*$ tel que

$$\gamma \equiv \beta_0 \pmod{\widehat{\mathfrak{P}}_1^{me}} \quad \text{et} \quad \gamma \equiv 1 \pmod{\widehat{\mathfrak{P}}_j^{me}} \text{ lorsque } j > 1.$$

Prenons, comme tout à l'heure τ_1, \dots, τ_r un système de représentants de G modulo $Z(\mathfrak{P})$, mais en plus, on impose que $\tau_1 = Id_L$ et $\tau_j(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}_j$, pour tout $j > 1$. Alors, si $j > 1$ et $\tau \in Z(\mathfrak{P})$, on a $\tau_j^{-1} \tau(\gamma) \equiv 1 \pmod{\widehat{\mathfrak{P}}^{me}}$. Alors,

$$N_{L/K}(\gamma) = \prod_{j=1}^r \prod_{\tau \in Z(\mathfrak{P})} \tau_j^{-1} \tau(\gamma) \equiv \prod_{\tau \in Z(\mathfrak{P})} \tau(\gamma) \equiv \prod_{\tau \in Z(\mathfrak{P})} \tau(\beta) = N_{\mathfrak{p}}(\beta) \pmod{\widehat{\mathfrak{P}}^{me}}.$$

Puisque $N_{L/K}(\gamma)$ et $N_{\mathfrak{p}}(\beta)$ sont dans $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ et que $\widehat{\mathfrak{P}}^e$ est le seul idéal au-dessus de $\widehat{\mathfrak{p}}$, cette dernière congruence est vraie modulo $\widehat{\mathfrak{p}}^m$. On a donc prouvé que $\alpha N_{\mathfrak{p}}(\beta)^{-1} \equiv \alpha N_{L/K}(\gamma)^{-1} \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^m}$ (avec la même convention pour $\pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^m}$). Et, puisque par hypothèse $\alpha N_{\mathfrak{p}}(\beta)^{-1} \in U_{\mathfrak{p}}^{(m)}$, on a $\alpha N_{L/K}(\gamma)^{-1} \in U_{\mathfrak{p}}^{(m)} \cap K^* = K_{\mathfrak{m}}^*$. Donc $N_{L/K}(\gamma) \in \ker(f)K_{\mathfrak{m}}^* \cap N(L^*) \subset K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*)$ et donc, $\alpha \in (K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*))K_{\mathfrak{m}}^*$. #

DIGRESSION

Interrompons un court instant notre propos pour un petit résultat technique sur les séries logarithmes et exponentielles sur $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. Et rappelons que l'on définit formellement

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{et} \quad \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

De plus, si $p\mathbb{Z}$ est l'unique idéal de \mathbb{Z} au-dessous de \mathfrak{p} , on note $e_0 = v_{\mathfrak{p}}(p)$.

Voici quelques résultats élémentaires sur $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ (qu'on a déjà d'ailleurs vus au chapitre 0, pour la plupart) :

Puisque $O_{\mathfrak{p}}$ est un anneau de valuation discrète, tout élément x de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ s'écrit de manière unique $x = u \cdot \pi^t$ où π est un générateur de $\widehat{\mathfrak{p}}$, appelé *uniformisante* et $t =: v_{\mathfrak{p}}(x) \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ est la *valuation p-adique de x* (qui étend celle sur K). On a les propriétés suivantes :

- a) $v_{\mathfrak{p}}(x) = \infty \iff x = 0$
- b) $v_{\mathfrak{p}}(xy) = v_{\mathfrak{p}}(x) + v_{\mathfrak{p}}(y)$
- c) $v_{\mathfrak{p}}(x + y) \geq \inf(v_{\mathfrak{p}}(x), v_{\mathfrak{p}}(y))$ avec égalité si $v_{\mathfrak{p}}(x) \neq v_{\mathfrak{p}}(y)$.

Sur $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, on définit une *valeur absolue* ou *norme* qui vaut

$$|x|_{\mathfrak{p}} = \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}.$$

Cette valeur absolue est *non-archimédienne*. De a), b) c), on trouve $|x|_{\mathfrak{p}} = 0 \iff x = 0$, $|xy|_{\mathfrak{p}} = |x|_{\mathfrak{p}} \cdot |y|_{\mathfrak{p}}$ et $|x + y| \leq \sup(|x|_{\mathfrak{p}}, |y|_{\mathfrak{p}})$ avec égalité si $|x|_{\mathfrak{p}} \neq |y|_{\mathfrak{p}}$. Cette dernière propriété implique qu'une somme $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge dans $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ pour cette valeur absolue si et seulement si $|x_n|_{\mathfrak{p}}$ tend vers 0.

Proposition (5.9)

Dans $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, les séries $\exp(x)$ et $\log(1 + x)$ convergent si $v_{\mathfrak{p}}(x) > \frac{e_0}{p-1}$ (on peut voir en particulier que $\exp(1) = e$ n'existe pas dans $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$). De plus, si $v_{\mathfrak{p}}(x) > \frac{e_0}{p-1}$, on a

- a) $v_{\mathfrak{p}}(\exp(x) - 1) = v_{\mathfrak{p}}(x)$
- b) $v_{\mathfrak{p}}(\log(1 + x)) = v_{\mathfrak{p}}(x)$.

Preuve

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. On vérifie facilement que $v_p(n!) = [\frac{n}{p}] + [\frac{n}{p^2}] + [\frac{n}{p^3}] + \dots$. Ecrivons n en base p : $n = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k$, avec $a_k \neq 0$ et $0 \leq a_i \leq p-1$. Donc $\frac{n}{p^l} = \underbrace{a_0 + \dots + a_{l-1}p^{l-1}}_{<1} + a_l + \dots + a_kp^{k-l}$.

Ainsi, $[\frac{n}{p^l}] = a_l + \dots + a_kp^{k-l}$ et donc

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= a_1 + a_2(1+p) + a_3(1+p+p^2) + \dots + a_k(1+p+\dots+p^{k-1}) \\ &= a_1 \frac{p-1}{p-1} + a_2 \frac{p^2-1}{p-1} + a_3 \frac{p^3-1}{p-1} + \dots + a_k \frac{p^k-1}{p-1} \\ &= \frac{1}{p-1}(n - a_0 - a_1 - a_2 - \dots - a_k) = \frac{1}{p-1}(n - S), \end{aligned}$$

où $S = \sum_{i=0}^k a_i$. On vérifie tout aussi facilement que $v_{\mathfrak{p}}(n!) = v_p(n!) \cdot v_{\mathfrak{p}}(p) = v_p(n!) \cdot e_0$. Calculons donc

$$v_{\mathfrak{p}}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = n \cdot v_{\mathfrak{p}}(x) - e_0 \cdot v_p(n!) = n \cdot \underbrace{\left(v_{\mathfrak{p}}(x) - \frac{e_0}{p-1}\right)}_{>0 \text{ par hyp.}} + \frac{e_0}{p-1} \cdot S \longrightarrow \infty \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Cela prouve que $|\frac{x^n}{n!}|_{\mathfrak{p}}$ tend vers 0, donc, que la série $\exp(x)$ converge. Montrons la partie a) : puisque $\exp(x) - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$, il suffit de montrer que si $n \geq 2$, on a $v_{\mathfrak{p}}(\frac{x^n}{n!}) > v_{\mathfrak{p}}(x)$. Cela est vrai :

$$v_{\mathfrak{p}}\left(\frac{x^n}{n!}\right) - v_{\mathfrak{p}}(x) = \underbrace{(n-1)}_{>0} \underbrace{\left(v_{\mathfrak{p}}(x) - \frac{e_0}{p-1}\right)}_{>0} + \underbrace{\frac{e_0}{p-1} \left(-1 + \sum_{i=0}^k a_i\right)}_{\geq 0} > 0,$$

toujours avec $n = a_0 + a_1p + \dots + a_kp^k$, le développement de n en base p . Donc a) est prouvé.

Regardons maintenant le série $\log(1+x)$. Puisqu'on a si bien évalué $v_p(\frac{x^n}{n!})$, profitons-en ! on voit que $v_p(\frac{x^n}{n!}) = v_p(\frac{x^n}{n!}) + \underbrace{v_p((n-1)!)}_{\geq 0} \rightarrow \infty$ si $n \rightarrow \infty$. Donc, $\log(1+x)$ converge si $v_p(x) > \frac{e_0}{p-1}$ (en fait on vient d'observer que le domaine de convergence de $\log(1+x)$ est plus étendu que celui de $\exp(x)$, ce qui est contraire à la situation dans \mathbb{C}).

Pour la partie b), il suffit d'observer comme pour la partie a) que

$$v_p(\frac{x^n}{n}) - v_p(x) = \underbrace{(n-1)}_{>0} \underbrace{(v_p(x) - \frac{e_0}{p-1})}_{>0} + \underbrace{v_p((n-1)!)}_{\geq 0} + \frac{e_0}{p-1} \underbrace{(-1 + \sum_{i=0}^k a_i)}_{\geq 0} > 0.$$

##

Corollaire (5.10)

Si $m > \frac{v_p(p)}{p-1}$, alors $\exp(x)$ est un isomorphisme de groupe $\widehat{\mathfrak{p}}^m \rightarrow U_p^{(m)}$. La réciproque étant $\log(x)$.

Preuve

Cela découle de la proposition précédente et des identités formelle $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$, $\exp(\log(1+x)) = 1+x$ et $\log(\exp(x)) = x$. ##

Fin de la digression

Proposition (5.11)

Soit $d > 0$ un entier, et $m > v_p(d) + \frac{v_p(p)}{p-1}$. Alors tout élément de $U_p^{(m)}$ est une puissance d -ième d'un élément de U_p . En particulier, si $d = [\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}]$ et $m > v_p(d) + \frac{v_p(p)}{p-1}$, alors on a

$$U_p^{(m)} \subset N_p(U_{\mathfrak{p}}).$$

Preuve

Puisque $m > v_p(d) + \frac{v_p(p)}{p-1} > \frac{v_p(p)}{p-1}$, en vertu du corollaire précédent, l'application $\log : U_p^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathfrak{p}}^m$ est un isomorphisme de groupe. Soit $1+x \in U_p^{(m)}$ et $y = \log(1+x) \in \widehat{\mathfrak{p}}^m$ (donc, $v_p(y) \geq m$). Ainsi,

$$v_p(\frac{y}{d}) = v_p(y) - v_p(d) \geq m - v_p(d) > \frac{v_p(p)}{p-1} > 0,$$

donc, d'une part, $\frac{y}{d} \in \widehat{\mathfrak{p}}$ (sa valuation est ≥ 1) et on peut en prendre son exponentielle. Posons donc $z = \exp(\frac{y}{d}) \in 1 + \widehat{\mathfrak{p}} \subset U_p$. On a alors : $z^d = \exp(d \cdot \frac{y}{d}) = \exp(y) = 1+x$. Cela montre que tout élément de $U_p^{(m)}$ est une puissance d -ième d'un élément de U_p . Montrons la seconde partie de la proposition. Si $1+x \in U_p^{(m)}$, on vient de voir que $1+x = z^d$ avec $z \in U_p$. Or $z^d = N_p(z)$ si $d = [\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}]$. Cela montre la proposition. ##

Corollaire (5.12)

Si $d = [\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}]$ et si $m > v_{\mathfrak{p}}(d) + \frac{v_{\mathfrak{p}}(p)}{p-1}$. Alors

$$a(\mathfrak{p}^m) = f_{\mathfrak{p}} \cdot [U_{\mathfrak{p}} : N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}})]$$

Preuve

C'est maintenant du tout cuit :

$$\begin{aligned} a(\mathfrak{p}^m) &\stackrel{\text{Lemme (5.6) b)}}{=} f_{\mathfrak{p}} \cdot [K^*(\mathfrak{m}) : (K^*(\mathfrak{m}) \cap N(L^*)) \cdot K_{\mathfrak{m}}^*] \\ &\stackrel{\text{Lemme (5.8)}}{=} f_{\mathfrak{p}} \cdot [U_{\mathfrak{p}} : N(U_{\mathfrak{P}})U_{\mathfrak{p}}^{(m)}] \stackrel{\text{Proposition (5.11)}}{=} f_{\mathfrak{p}} \cdot [U_{\mathfrak{p}} : N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}})]. \end{aligned}$$

#

Reprenons un peu de cohomologie cyclique (mais cette fois dans le cas où l'extension est $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, le groupe de Galois est $Z(\mathfrak{P})$ et le $Z(\mathfrak{P})$ -module est $U_{\mathfrak{P}}$). Suivant les définitions, on a $\ker(\Delta|_{U_{\mathfrak{P}}}) = \{x \in U_{\mathfrak{P}} \mid \sigma(x) = x \ \forall x \in Z(\mathfrak{P})\} = U_{\mathfrak{P}} \cap \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} = U_{\mathfrak{p}}$. Ainsi,

$$[U_{\mathfrak{p}} : N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}})] = |H^0(U_{\mathfrak{P}})| = q^{-1}(U_{\mathfrak{P}}) \cdot |H^1(U_{\mathfrak{P}})|, \quad (*)$$

où $q(U_{\mathfrak{P}})$ est le quotient de Herbrand. Ainsi, il ne nous reste plus qu'à calculer $q(U_{\mathfrak{P}})$ et $|H^1(U_{\mathfrak{P}})|$.

Jusqu'ici l'extension L/K était supposée cyclique. Nous allons affaiblir cette hypothèse pour obtenir des résultats intéressants (les Théorèmes (5.16) et (5.17)). Nous supposerons que L/K est une extension galoisienne quelconque, mais nous imposerons seulement que $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ soit cyclique.

Lemme (5.13)

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres, $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L)$, $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ tels que $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ soit cyclique. Alors on a :

$$|H^1(U_{\mathfrak{P}})| = e_{\mathfrak{p}}.$$

Preuve

Par le Théorème 90 de Hilbert, on a $\ker(N|_{U_{\mathfrak{P}}}) = U_{\mathfrak{P}} \cap \Delta(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)$. Mettons que $Z(\mathfrak{P}) = \langle \tau \rangle$. Soit $x \in \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*$. Puisque $\tau(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$, on a $v_{\mathfrak{P}}(\tau(x)) = v_{\mathfrak{P}}(x)$; donc $\Delta(x) = \frac{x}{\tau(x)} \in U_{\mathfrak{P}}$. Cela prouve que $\Delta(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*) \subset U_{\mathfrak{P}}$ et donc que $\ker(N|_{U_{\mathfrak{P}}}) = \Delta(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)$, et ainsi, $H^1(U_{\mathfrak{P}}) \simeq \Delta(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)/\Delta(U_{\mathfrak{P}})$. D'autre part, l'application

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^* \xrightarrow{\Delta} \Delta(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*) \rightarrow \Delta(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)/\Delta(U_{\mathfrak{P}})$$

est évidemment surjective. On prétend que le noyau est $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \cdot U_{\mathfrak{P}}$. Clairement, $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \cdot U_{\mathfrak{P}}$ est inclu dans le noyau, car $\Delta(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*) = \{1\}$. Réciproquement, si x est un élément du noyau, cela veut dire que $\Delta(x) = \Delta(u)$ pour un $u \in U_{\mathfrak{P}}$. Donc, $\Delta(\frac{x}{u}) = 1$, i.e. $\frac{x}{u} = a \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$, et donc $x = a \cdot u \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \cdot U_{\mathfrak{P}}$. On a ainsi montré que

$$H^1(U_{\mathfrak{P}}) \simeq \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*/(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \cdot U_{\mathfrak{P}}).$$

Si π est une uniformisante (un générateur de $\widehat{\mathfrak{P}}$), l'application $\pi^k \cdot u \mapsto (k, u)$ est un isomorphisme de $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*$ sur $\mathbb{Z} \times U_{\mathfrak{P}}$. Puisque $\pi^{e_{\mathfrak{p}}}$ est un générateur de $\widehat{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_{\mathfrak{P}}$, tout générateur de $\widehat{\mathfrak{p}}$ peut s'écrire $\pi^{e_{\mathfrak{p}}} \cdot u$, où $u \in U_{\mathfrak{P}}$. Ainsi, l'image de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \cdot U_{\mathfrak{P}}$ via cet isomorphisme est $e_{\mathfrak{p}}\mathbb{Z} \times U_{\mathfrak{P}}$. D'où, $H^1(U_{\mathfrak{P}}) \simeq \mathbb{Z}/e_{\mathfrak{p}}\mathbb{Z}$, ce qui montre le lemme. #

Lemme (5.14)

Soit L/K une extension galoisienne de corps de nombres, $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L)$, $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ tels que $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ soit cyclique. Alors on a :

$$q(U_{\mathfrak{P}}) = 1.$$

Preuve

Puisque $O_{\mathfrak{P}}$ est local, alors comme lors du Lemme (5.8), on voit que $U_{\mathfrak{P}}/U_{\mathfrak{P}}^{(m)}$ est le groupe des unités de $O_{\mathfrak{P}}/\widehat{\mathfrak{P}}^{(m)}$ qui est fini, ainsi, $[U_{\mathfrak{P}} : U_{\mathfrak{P}}^{(m)}] < \infty$. Cela prouve, en vertu du Corollaire (4.7), que $q(U_{\mathfrak{P}}) = q(U_{\mathfrak{P}}^{(m)})$, pour tout $m > 1$. Le Corollaire (5.10) (appliqué à $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$) montre que si m est assez grand, l'application $\log : U_{\mathfrak{P}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathfrak{P}}^m$ est un isomorphisme de groupe. De plus, tout élément du groupe de Galois $\mathbb{Z}(\mathfrak{P})$ est continu pour la topologie \mathfrak{P} -adique (cela se vérifie aisément en utilisant le fait que $v_{\mathfrak{P}}(\sigma(x)) = v_{\mathfrak{P}}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$ et $\sigma \in Z(\mathfrak{P})$). Ainsi, $\sigma(\log(x)) = \log(\sigma(x))$ pour tout $\sigma \in Z(\mathfrak{P})$, d'où l'application \log est un isomorphisme de $Z(\mathfrak{P})$ -module. On en déduit donc (grâce au Lemme (4.4), dans le cas où C est trivial) que $q(U_{\mathfrak{P}}) = q(\widehat{\mathfrak{P}}^m)$ si m est assez grand. Ensuite, puisque $\widehat{\mathfrak{P}}^m$ est d'indice fini dans $O_{\mathfrak{P}}$, on en déduit, grâce au Corollaire (4.7), que $q(U_{\mathfrak{P}}) = q(O_{\mathfrak{P}})$. Par le théorème de la base normale (cf. [La1, Thm. 6.13.1, p. 320]), il existe $\omega \in \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$ tel que $\tau^1(\omega), \dots, \tau^d(\omega)$ forme une base de $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$ sur $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, où $d = [\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}]$ et τ est un générateur de $Z(\mathfrak{P})$. Quitte à multiplier ω par un élément de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ (par exemple une bonne puissance de $\pi^{\epsilon_{\mathfrak{p}}}$), on peut supposer que $\omega \in O_{\mathfrak{P}}$. Soit M , le sous- $O_{\mathfrak{P}}$ -module engendré par les $\tau^i(\omega)$. Puisque $O_{\mathfrak{P}}$ et M sont des $O_{\mathfrak{p}}$ -modules libres de même rang. Donc M est d'indice fini dans $O_{\mathfrak{P}}$. On en déduit, grâce au Corollaire (4.7), que $q(U_{\mathfrak{P}}) = q(M)$. Finalement, M est un $O_{\mathfrak{p}}$ -module de permutation (dans le sens de la Proposition (4.8)), avec dans notre cas, $m = 1$, $G = Z(\mathfrak{P})$ et $R = O_{\mathfrak{p}}$. Et cela prouve que $q(U_{\mathfrak{P}}) = q(M) = 1$. \neq

Théorème (5.15)

Soit L/K , une extension cyclique de corps de nombres, \mathfrak{m} un K -module tel que les exposants des diviseurs premiers finis de \mathfrak{m} soient suffisamment grands, alors on a

$$a(\mathfrak{m}) = [K^* : N_{L/K}(L^*)K_{\mathfrak{m}}^*] = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}.$$

Preuve

Cela découle de ce qui précède : si $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_{\infty}} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}$, alors

$$\begin{aligned} a(\mathfrak{m}) &\stackrel{\text{Lemme (5.3)}}{=} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} a(\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_{\infty}} a(\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}) \stackrel{\text{Lemme (5.4)}}{=} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} a(\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}) \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_{\infty}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} \\ &\stackrel{\text{Corollaire (5.12)}}{=} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} f_{\mathfrak{p}} \cdot [U_{\mathfrak{p}} : N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}})] \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_{\infty}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} \stackrel{(*)}{=} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_0} f_{\mathfrak{p}} \cdot q^{-1}(U_{\mathfrak{P}}) \cdot |H^1(U_{\mathfrak{P}})| \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_{\infty}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} \\ &\stackrel{\text{Lemmes (5.13) et (5.14)}}{=} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

\neq

DIGRESSION

Théorème (5.16)

Soit L/K , une extension galoisienne de corps de nombres et \mathfrak{p} un idéal premier de K non ramifié dans L et \mathfrak{P} un idéal de L au-dessus de \mathfrak{p} . Alors

$$U_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}}),$$

où $N_{\mathfrak{p}} = N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}$.

Preuve

Puisque \mathfrak{p} ne ramifie pas, $Z(\mathfrak{p})$ est cyclique. Les Lemmes (5.13) et (5.14) s'appliquent alors. On a donc $q(U_{\mathfrak{P}}) = 1$ et $|H^1(U_{\mathfrak{P}})| = e_{\mathfrak{p}} = 1$. On en déduit que $H^0(U_{\mathfrak{P}}) = 1$, d'où la proposition, puisque par définition dans notre cas $H^0(U_{\mathfrak{P}}) = \ker(\Delta|U_{\mathfrak{P}})/N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}}) = U_{\mathfrak{p}}/N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}})$ (voir le raisonnement après le Corollaire (5.12)). Ce qui prouve la proposition. #

Un théorème semblable sera démontré au Chapitre 11 (Corollaire (11.16))

Proposition (5.17)

Soit L/K , une extension galoisienne de corps de nombres et \mathfrak{p} un idéal premier de K ramifié ou non dans L et \mathfrak{P} un idéal de L au-dessus de \mathfrak{p} tel que $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ est cyclique. Alors

$$[\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)] = [\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}].$$

Preuve

On a déjà vu au Lemme (5.13) que $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^* \simeq \mathbb{Z} \times U_{\mathfrak{P}}$ (via une uniformisante). Ainsi, $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*/U_{\mathfrak{P}} \simeq \mathbb{Z}$ comme $Z(\mathfrak{P})$ -module (\mathbb{Z} étant un $Z(\mathfrak{P})$ -module trivial). Donc, en vertu de la Proposition (4.8), $q(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*/U_{\mathfrak{P}}) = \frac{1}{|Z(\mathfrak{P})|}$. D'autre part, on sait (Lemme (5.14)) que $q(U_{\mathfrak{P}}) = 1$ et grâce à la suite exacte $1 \rightarrow U_{\mathfrak{P}} \rightarrow \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^* \rightarrow \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*/U_{\mathfrak{P}} \rightarrow 1$ et au Lemme (4.4), on tire que $q(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*) = \frac{1}{|Z(\mathfrak{P})|}$. D'autre part, le Théorème 90 de Hilbert (ou la Proposition (4.10) d)) nous dit que $|H^1(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)| = 1$. Finalement,

$$\frac{1}{|Z(\mathfrak{P})|} = q(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*) = \frac{|H^1(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)|}{|H^0(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)|} = \frac{1}{|H^0(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)|},$$

ce qui montre que $|\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}})| = |H^0(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)| = |Z(\mathfrak{P})| = [\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}]$. #

Un résultat similaire sera aussi vu au Chapitre 11 (Théorème (11.15))

Chapitre 6 :

L'égalité fondamentale du corps de classe pour les extensions cycliques et théorème de la norme de Hasse

Dans ce chapitre, on va prouver que l'inégalité montrée au Théorème (2.20) est en fait une égalité dans le cas des extensions cycliques. Comme premier corollaire, on en déduira le théorème de la norme de Hasse.

Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres de groupe $G = \langle \sigma \rangle$. Posons $N = N_{L/K}$ la norme de L sur K . Soit \mathfrak{m} un K -module. Rappelons que l'application $f = f_{\mathfrak{m}} : L^* \rightarrow I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$ est la composition de l'application $\iota : L^* \rightarrow I_L$, $x \mapsto xO_L$ et de l'application $j_{\mathfrak{m}} : I_L \rightarrow I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$, $j_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$ si $\mathfrak{P} \nmid \mathfrak{m}$ et $j_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{P}) = O_L$ si $\mathfrak{P} | \mathfrak{m}$ et on prolonge par multiplicativité. Clairement, f est un homomorphisme de G -modules. On cherche, dans un premier temps, des renseignements sur l'application $f_0 : K^*/N(L^*) = H^0(L^*) \rightarrow H^0(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) = I_K(\mathfrak{m})/N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$, associée à f (cf. début du Chapitre 4).

Petite remarque :

Tout carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \beta \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

d'homomorphismes de G -modules se prolonge de manière unique en un diagramme commutatif aux lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \longrightarrow & \operatorname{coker}(f) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow \delta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 1 & \longrightarrow & \ker(f') & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \longrightarrow & \operatorname{coker}(f') & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

L'application $\delta = \alpha|_{\ker(f)}$ est bien définie, car $\alpha(\ker(f)) \subset \ker(f')$. Puisque, de plus, $\beta(\operatorname{Im}(f)) \subset \operatorname{Im}(f')$ et que par définition, $\operatorname{coker}(f) = B/\operatorname{Im}(f)$, l'application γ est obtenue par passages aux quotients de β . De plus, γ est surjective si β l'est et δ est injective si α l'est.

fin de la petite remarque.

Puisque, clairement, on a $f(K^*) \subset I_K(\mathfrak{m})$, $f(K_{\mathfrak{m}}^*) = P_{\mathfrak{m}}$ et $f(N(L^*)) \subset N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$, on peut considérer

(grâce à la petite remarque, utilisée 2 fois) le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \frac{N(L^*)K_m^*}{N(L^*)} & \xrightarrow{f_0^*} & \frac{N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))P_m}{N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))} & \xrightarrow{p^*} & \ker(d_4) \\
 & & \downarrow d_5 & & \downarrow d_6 & & \downarrow d_7 \\
 & & H^0(L^*) & & H^0(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) & & \\
 & & \parallel & & \parallel & & \\
 1 \longrightarrow & \ker(f_0) & \xrightarrow{\alpha} & \frac{K^*}{N(L^*)} & \xrightarrow{f_0} & \frac{I_K(\mathfrak{m})}{N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))} & \xrightarrow{p} & \text{coker}(f_0) \longrightarrow 1 \\
 & \downarrow d_1 & & \downarrow d_2 & & \downarrow d_3 & & \downarrow d_4 \\
 1 \longrightarrow & \ker(g) & \xrightarrow{\beta} & \frac{K^*}{N(L^*)K_m^*} & \xrightarrow{g} & \frac{I_K(\mathfrak{m})}{N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))P_m} & \xrightarrow{p'} & \text{coker}(g) \longrightarrow 1 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & 1 & & 1 & & 1
 \end{array}$$

le δ de la remarque d'avant d'ordre $a(\mathfrak{m})$

où f_0^*, f_0 et g sont induites par f . Les applications d_5, d_6, d_7, α et β sont des inclusions, d_2 et d_3 sont les surjections naturelles. Les applications d_1, d_4 et p^* sont les applications construites lors de la petite remarque. Puisque d_3 est surjectif, d_4 l'est aussi. Les trois colonnes sont exactes ainsi que les deux dernières lignes. Maintenant, nous allons faire une petite partie de chasse dans ce diagramme ainsi que quelques applications des théorèmes d'isomorphismes. Et en 6 affirmations, nous allons prouver le résultat principal de ce chapitre.

Première affirmation : p^* est surjective

En effet, soit $x \in \ker(d_4)$. Il existe $y \in I_K(\mathfrak{m})/N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$ tel que $p(y) = d_7(x)$. On a donc, par commutativité, $p'(d_3(y)) = d_4(p(y)) = d_4(d_7(x)) = 1$. Donc, $d_3(y) \in \ker(p') = \text{Im}(g)$; il existe donc $z \in K^*/N(L^*)K_m^*$ tel que $g(z) = d_3(y)$. Puisque d_2 est surjective, il existe u tel que $d_2(u) = z$. Alors, $d_3(f_0(u)) = g(d_2(u)) = g(z) = d_3(y)$. Cela implique que $\frac{y}{f_0(u)} \in \ker(d_3) = \text{Im}(d_6)$. Il existe donc v tel que $\frac{y}{f_0(u)} = d_6(v)$. Alors, $d_7(p^*(v)) = p(d_6(v)) = p(\frac{y}{f_0(u)}) = p(y) = d_7(x)$. Cela implique que $p^*(v) = x$, puisque d_7 est injective. Cela montre notre première affirmation.

Deuxième affirmation :

$$\text{coker}(f_0) \simeq \text{coker}(g) \quad (1).$$

En effet, de l'égalité $d_7 \circ p^* \circ f_0^* = p \circ f \circ d_5 = 1$ et du fait que d_7 est injective, on tire que $p^* \circ f_0^* = 1$. D'autre part, $f(K_m^*) = P_m$, donc f_0^* est surjective. Grâce à ces deux faits et puisque p^* est surjective, on

en déduit que $\ker(d_4) = 1$ et donc que d_4 est un isomorphisme entre $\text{coker}(f_0)$ et $\text{coker}(g)$.

On définit

$$n(\mathfrak{m}) = [K_{\mathfrak{m}}^* \cap \iota^{-1}(N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))) : K_{\mathfrak{m}}^* \cap N(L^*)].$$

Troisième affirmation :

$$|\ker(f_0)| = |\ker(g)| \cdot n(\mathfrak{m}) \quad (2).$$

En effet, montrons déjà que d_1 est surjective. Soit donc $x \in \ker(g)$. Puisque d_2 est surjective, il existe y tel que $\beta(x) = d_2(y)$. On a alors $d_3(f_0(y)) = g(d_2(y)) = g(\beta(x)) = 1$. Cela prouve que $f_0(y) \in \ker(d_3) = \text{Im}(d_6)$, il existe donc z tel que $f_0(y) = d_6(z)$. Puisque f_0^* est surjective (deuxième affirmation), il existe u tel que $f_0^*(u) = z$. Calculons : $f_0(d_5(u)) = d_6(f_0^*(u)) = d_6(z) = f_0(y)$. Donc $\frac{y}{d_5(u)} \in \ker(f_0)$ et alors, $\beta(d_1(\frac{y}{d_5(u)})) = d_2(\alpha(\frac{y}{d_5(u)})) \stackrel{\alpha \text{ incl.}}{=} d_2(\frac{y}{d_5(u)}) = d_2(y) = \beta(x)$, ce qui prouve que $x = d_1(\frac{y}{d_5(u)})$, puisque β est injective. Ce qui montre que d_1 est surjective. On a ainsi prouvé que

$$|\ker(g)| = \frac{|\ker(f_0)|}{|\ker(d_1)|}.$$

Mais, puisque α est l'inclusion, on a $\ker(d_1) = \ker(f_0) \cap \ker(d_2)$. Soit $x \cdot N(L^*) \in \ker(f_0) \cap \ker(d_2)$. Il existe donc $y \in K_{\mathfrak{m}}^*$ tel que $x \cdot N(L^*) = y \cdot N(L^*)$ et $f(y) \in N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$. C'est-à-dire (voir la définition de f) que $\iota(y) \in N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$, ou encore, $y \in \iota^{-1}(N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))) \cap K_{\mathfrak{m}}^*$. Enfin, si y et $y_1 \in K_{\mathfrak{m}}^*$, alors $y \cdot N(L^*) = y_1 \cdot N(L^*) \iff y y_1^{-1} \in N(L^*)$. Ainsi,

$$\ker(f_0) \cap \ker(d_2) = \frac{K_{\mathfrak{m}}^* \cap \iota^{-1}(N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})))}{K_{\mathfrak{m}}^* \cap N(L^*)}$$

Ce qui montre que $|\ker(d_1)| = n(\mathfrak{m})$, ce qui montre la troisième affirmation.

Nous avons maintenant besoin d'un petit lemme facile, mais que nous réutiliserons par la suite :

Lemme (6.1)

Si B est un sous-module d'indice fini d'un module A et si β est un homomorphisme de module défini sur A , alors on a

$$[A : B] = [\beta(A) : \beta(B)] \cdot [\ker(\beta) : B \cap \ker(\beta)].$$

Preuve

β induit un homomorphisme surjectif $A/B \rightarrow \beta(A)/\beta(B)$ dont le noyau est $\ker(\beta) \cdot B/B \stackrel{\text{thm. d'isom.}}{\simeq} \ker(\beta)/\ker(\beta) \cap B$. Et cela prouve notre lemme. #

Posons S l'ensemble des places de L qui divisent \mathfrak{m} et L^{*S} l'ensemble des S -unités qui est, rappelons-le, le noyau $\ker(f_{\mathfrak{m}}) = \{\alpha \in L^* \mid \iota(\alpha) \text{ n'est divisible que par des idéaux premiers de } S\}$. La suite exacte de G -modules et G -homomorphismes

$$1 \rightarrow L^{*S} \xrightarrow{\gamma=\text{incl.}} L^* \xrightarrow{f=f_{\mathfrak{m}}} I_L(\tilde{\mathfrak{m}}) \xrightarrow{\lambda} V := \text{coker}(f) \rightarrow 1$$

se scinde en deux suites exactes (plus courtes)

$$1 \rightarrow L^{*S} \xrightarrow{\gamma} L^* \xrightarrow{\alpha} f(L^*) \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad 1 \rightarrow f(L^*) \xrightarrow{\beta} I_L(\tilde{\mathfrak{m}}) \xrightarrow{\lambda} V \rightarrow 1,$$

où α est la surjection canonique et β l'inclusion de $f(L^*)$ dans $I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$. Ces suites exactes correspondent aux hexagones exacts suivants (en se souvenant du Lemme (4.1) et au fait que $H^1(L^*) = H^1(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) = 1$, (Proposition (4.10))) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H^1(f(L^*)) & \xrightarrow{\delta_1} & H^0(L^{*S}) & \xrightarrow{\gamma_0} & H^0(L^*) \\
 & \swarrow & & & & \searrow \alpha_0 & \\
 1 & & & & & & \\
 & \nwarrow & H^1(L^{*S}) & \xleftarrow{\delta_2} & H^0(f(L^*)) & & \\
 & & & & \parallel & & \\
 & \swarrow & H^1(V) & \xrightarrow{\delta_3} & H^0(f(L^*)) & \xrightarrow{\beta_0} & H^0(I_L(\tilde{m})) \\
 & \nwarrow & & & & \searrow \lambda_0 & \\
 1 & & & & & & \\
 & & H^1(f(L^*)) & \xleftarrow{\delta_4} & H^0(V) & &
 \end{array}$$

On remarque que $f_0 = \beta_0 \circ \alpha_0$ (cf. Proposition (4.2)).

Quatrième affirmation :

On a

$$|\text{coker}(f_0)| = \frac{|H^0(V)|}{|H^1(V)|} \cdot \frac{|H^1(L^{*S})|}{|H^1(f(L^*))|} \cdot |\ker(\beta_0) \cap \text{Im}(\alpha_0)|. \quad (3)$$

En effet, on a $|\text{coker}(f_0)| = [H^0(I_L(\tilde{m})) : \text{Im}(\beta_0 \circ \alpha_0)] = [H^0(I_L(\tilde{m})) : \text{Im}(\beta_0)] \cdot [\text{Im}(\beta_0) : \text{Im}(\beta_0 \circ \alpha_0)]$. D'autre part, on applique le Lemme (6.1), avec $A = H^0(f(L^*))$ et $B = \text{Im}(\alpha_0)$ et $\beta = \beta_0$. On trouve

$$[\text{Im}(\beta_0) : \text{Im}(\beta_0 \circ \alpha_0)] = \frac{[H^0(f(L^*)) : \text{Im}(\alpha_0)]}{[\ker(\beta_0) : \ker(\beta_0) \cap \text{Im}(\alpha_0)]}.$$

D'autre part encore, $[H^0(f(L^*)) : \text{Im}(\alpha_0)] = |\text{coker}(\alpha_0)| = |\text{Im}(\delta_2)| = |H^1(L^{*S})|$. On a aussi, $[H^0(I_L(\tilde{m})) : \text{Im}(\beta_0)] = |\text{coker}(\beta_0)| = |\text{Im}(\lambda_0)|$ et $|H^0(V)| = |\text{Im}(\lambda_0)| \cdot |\text{Im}(\delta_4)| = |\text{Im}(\lambda_0)| \cdot |H^1(f(L^*))|$. On obtient alors

$$|\text{coker}(f_0)| = \frac{|H^0(V)|}{|H^1(f(L^*))|} \cdot \frac{|H^1(L^{*S})|}{[\ker(\beta_0) : \ker(\beta_0) \cap \text{Im}(\alpha_0)]}.$$

Notons encore que $|\ker(\beta_0)| = |\text{Im}(\delta_3)| = |H^1(V)|$. Cela prouve notre affirmation.

Cinquième affirmation :

$$|\ker(f_0)| = |\ker(\beta_0) \cap \text{Im}(\alpha_0)| \cdot \frac{|H^0(L^{*S})|}{|H^1(f(L^*))|}. \quad (4)$$

En effet, $\ker(f_0) = \ker(\beta_0 \circ \alpha_0) = \alpha_0^{-1}(\ker(\beta_0))$ est envoyé par α_0 sur $\ker(\beta_0) \cap \text{Im}(\alpha_0)$ et a pour noyau $\ker(\alpha_0) \cap \alpha_0^{-1}(\ker(\beta_0)) = \ker(\alpha_0)$. Ainsi

$$|\ker(f_0)| = |\ker(\beta_0) \cap \text{Im}(\alpha_0)| \cdot |\ker(\alpha_0)| = |\ker(\beta_0) \cap \text{Im}(\alpha_0)| \cdot |\text{Im}(\gamma_0)| = |\ker(\beta_0) \cap \text{Im}(\alpha_0)| \cdot \frac{|H^0(L^{*S})|}{|H^1(f(L^*))|}. \quad \#$$

Sixième affirmation :

$$\frac{|\text{coker}(f_0)|}{|\ker(f_0)|} = q(L^{*S}). \quad (5)$$

En effet, en combinant les équations (3) et (4), on trouve $\frac{|\text{coker}(f_0)|}{|\ker(f_0)|} = \frac{q(L^{*S})}{q(V)}$. Or, V est fini, car $f(L^*)$ contient $\iota(L_{\mathfrak{m}}^*) = P_{\mathfrak{m}}^*$, donc $V \simeq I_L(\tilde{\mathfrak{m}})/f(L^*)$ est un quotient de $I_L(\tilde{\mathfrak{m}})/P_{\mathfrak{m}}^*$ (groupe de classe généralisé pour L) qui est fini (cf. Théorème (0.12)) donc $q(V) = 1$ (cf. Lemme (4.6)). Cela prouve l'affirmation.

Nous voilà prêt à prouver l'égalité fondamentale. Mais, il faut encore mettre ensemble tous les préparatifs et observer une ou deux choses. Du grand diagramme (p. 71), on retient la ligne exacte :

$$1 \rightarrow \ker(g) \xrightarrow{\beta} K^*/N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^* \xrightarrow{g} I_K(\mathfrak{m})/N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))P_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{p'} \text{coker}(g) \rightarrow 1.$$

Alors, $[I_K(\mathfrak{m}) : N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}] = |\text{coker}(g)| \cdot |\text{Im}(g)| = \frac{|\text{coker}(g)|}{|\ker(g)|} \cdot a(\mathfrak{m})$ (voir au chapitre 5 pour la définition de $a(\mathfrak{m})$). En vertu des équation (1) et (2), c'est égal à $a(\mathfrak{m}) \cdot n(\mathfrak{m}) \cdot \frac{|\text{coker}(f_0)|}{|\ker(f_0)|} = a(\mathfrak{m}) \cdot n(\mathfrak{m}) \cdot q(L^{*S})$ en vertu de l'équation (5). Résumons-nous, on a

$$[I_K(\mathfrak{m}) : N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}] = a(\mathfrak{m}) \cdot n(\mathfrak{m}) \cdot q(L^{*S}). \quad (6)$$

Or, si \mathfrak{m} est divisible par toutes les places qui ramifient, on sait que

$$q(L^{*S}) = [L : K] \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} \frac{1}{e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}} \quad (\text{cf. Théorème (4.14)})$$

et si les exposants des places finies de \mathfrak{m} sont assez grand, on a

$$a(\mathfrak{m}) = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{m}} e_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}} \quad (\text{cf. Théorème (5.15)}).$$

Supposons que ces deux conditions (sur \mathfrak{m}) soient satisfaites. La première égalité du corps de classe (cf. Théorème (2.20)) et ces deux derniers résultats, combinés avec (6), nous donnent alors

$$n(\mathfrak{m}) \cdot [L : K] = [I_K(\mathfrak{m}) : N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}] \leq [L : K].$$

On a donc montré que, dans ce cas, $n(\mathfrak{m}) = 1$ et $[I_K(\mathfrak{m}) : N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}] = [L : K]$. Résumons tout cela dans le

Théorème (6.2) (égalité fondamentale du corps de classe pour les ext. cycliques)

Si L/K est une extension cyclique de corps de nombres et si \mathfrak{m} est un K -module divisible par toutes les place ramifiées et dont les exposants des places finies qui le divisent sont suffisamment grandes, alors on a :

$$[I_K(\mathfrak{m}) : N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}] = [L : K]$$

et dans ces mêmes conditions, on a $n(\mathfrak{m}) = 1$, ce qui peut s'énoncer comme suit :

Corollaire (6.3)

Sous les mêmes hypothèses, on a

$$K_{\mathfrak{m}}^* \cap \iota^{-1}(N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))) = K_{\mathfrak{m}}^* \cap N_{L/K}(L^*).$$

#

Corollaire (6.4)(Théorème de la Norme de Hasse)

Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres et $\alpha \in K^*$. Alors α est la norme d'un élément de L si et seulement si α est une norme locale en tout idéal premier \mathfrak{p} de K . Autrement dit :

$$\exists \beta \in L \text{ tel que } \alpha = N_{L/K}(\beta) \iff \forall \mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K), \exists \mathfrak{P} | \mathfrak{p} \text{ et } \beta_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{L}_{\mathfrak{P}} \text{ tel que } N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\beta_{\mathfrak{p}}) = \alpha,$$

où, rappelons-le, $\mathbb{P}(K)$ est l'ensemble des places (finie ou infinies) de K .

Preuve

Si $\alpha = N_{L/K}(\beta)$, alors $\alpha = \prod_{\rho \in G} \rho(\beta)$, où $G = \text{Gal}(L/K)$. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de K et $Z(\mathfrak{p})$, le groupe de décomposition de \mathfrak{p} , alors on sait que $Z(\mathfrak{p}) = \text{Gal}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}})$ pour tout idéal premier \mathfrak{P} de L au-dessus de \mathfrak{p} . Si $G = \sqcup_{i=1}^k \sigma_i Z(\mathfrak{p})$ est une décomposition en classes de G modulo $Z(\mathfrak{p})$, alors on a

$$\alpha = \prod_{\sigma \in Z(\mathfrak{p})} \sigma \left(\prod_{i=1}^k \sigma_i(\beta) \right) = N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}} \left(\prod_{i=1}^k \sigma_i(\beta) \right),$$

et $\prod_{i=1}^k \sigma_i(\beta) \in L \subset \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$.

Réciproquement, supposons que α soit une norme locale partout. Montrons d'abord que l'idéal $(\alpha) = \alpha O_K$ est la norme d'un idéal de L . Soit \mathfrak{p} un idéal premier de K tel que $\mathfrak{p} | (\alpha)$ et \mathfrak{p}^a est la puissance exacte de \mathfrak{p} dans la décomposition de (α) en idéaux premiers. Si \mathfrak{P} est un idéal premier de L au-dessus de \mathfrak{p} et $f = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, alors, $N_{L/K}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{p}^f$. Donc, si on arrive à prouver que $f | a$, alors $\mathfrak{p}^a = N_{L/K}(\mathfrak{P}^{\frac{a}{f}})$ et on conclut par multiplicativité. On peut supposer par hypothèse que

$$\alpha O_{\mathfrak{p}} = N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\beta_{\mathfrak{p}}) \cdot O_{\mathfrak{p}} = N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\beta_{\mathfrak{p}} \cdot O_{\mathfrak{P}}).$$

Notons $\widehat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} O_{\mathfrak{p}}$ et $\widehat{\mathfrak{P}} = \mathfrak{P} O_{\mathfrak{P}}$. Alors on a $\alpha O_{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{p}}^a$ et il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta_{\mathfrak{p}} O_{\mathfrak{P}} = \widehat{\mathfrak{P}}^b$. Puisque $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\widehat{\mathfrak{P}}) = \widehat{\mathfrak{p}}^f$, en élevant à la puissance b , on trouve $\widehat{\mathfrak{p}}^a = \widehat{\mathfrak{p}}^{bf}$. Cela montre que $a = bf$ donc que f divise a .

Soit \mathfrak{m} un K -module tel que $n(\mathfrak{m}) = 1$ (c'est possible, en vertu du Théorème (6.2)). Ecrivons $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p}_i \in \mathbb{P}(K)} \mathfrak{p}_i^{b_i}$ et fixons, pour chaque i , \mathfrak{P}_i une place au-dessus de \mathfrak{p}_i , $e_i = e(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}_i)$ et $\beta_i \in \mathbb{L}_{\mathfrak{P}_i}$ tels que $\alpha = N_{\mathfrak{p}_i}(\beta_i)$, où $N_{\mathfrak{p}_i} = N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}_i}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}_i}}$. Pour chaque i , on choisit un $\beta'_i \in L$ tel que $\beta'_i \equiv \beta_i \pmod{\widehat{\mathfrak{P}_i}^{b_i e_i}}$ (car L est dense dans $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}_i}$, voir encore la définition de $\widehat{\mathfrak{P}_i}^{b_i e_i}$ dans le cas infini, mais ici, ça veut dire simplement qu'ils ont le même signe dans le plongement considéré). Par le Théorème d'approximation débile (Théorème (0.3)), il existe $\gamma \in L$ tel que pour chaque i , on ait

$$\begin{cases} \gamma \equiv \beta'_i \pmod{\widehat{\mathfrak{P}_i}^{b_i e_i}} \\ \gamma \equiv 1 \pmod{\widehat{\mathfrak{P}_i}^{b_i e_i}} \text{ pour les } \mathfrak{P} \text{ au-dessus de } \mathfrak{p}_i, \mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_i. \end{cases} \quad (*)$$

Fixons un i et considérons une décomposition $G = \text{Gal}(L/K) = \bigsqcup_j \tau_j Z(\mathfrak{p}_i)$ en choisissant $\tau_i = 1$. Ainsi, si $j \neq i$, $\tau_j \neq 1$ et donc, $\tau_j^{-1}(\widehat{\mathfrak{P}_i}^{b_i e_i}) \neq \widehat{\mathfrak{P}_i}^{b_i e_i}$, ce qui implique par (*) que $\gamma \equiv 1 \pmod{\tau_j^{-1}(\widehat{\mathfrak{P}_i}^{b_i e_i})}$, ou encore $\tau_j(\gamma) \equiv 1 \pmod{\widehat{\mathfrak{P}_i}^{b_i e_i}}$. On obtient alors :

$$N_{L/K}(\gamma) = \prod_j \prod_{\sigma \in Z(\mathfrak{p}_i)} \tau_j \sigma(\gamma) \equiv \prod_{\sigma \in Z(\mathfrak{p}_i)} \sigma(\gamma) = N_{\mathfrak{p}_i}(\gamma) \equiv N_{\mathfrak{p}_i}(\beta'_i) \pmod{\widehat{\mathfrak{P}_i}^{b_i e_i}}.$$

On a aussi que $\alpha = N_{\mathfrak{p}_i}(\beta_i) \equiv N_{\mathfrak{p}_i}(\beta'_i) \pmod{\widehat{\mathfrak{P}_i^{b_i e_i}}}$, mais aussi modulo $\mathfrak{P}_i^{b_i e_i}$ (car elles sont dans L^*). On a donc montré que $\alpha \equiv N_{L/K}(\gamma) \pmod{\mathfrak{P}_i^{b_i e_i}}$, donc aussi modulo $\mathfrak{p}_i^{b_i}$, car ce sont des éléments de K^* . Ceci est vrai pour chaque i , ce qui implique que $\alpha \equiv N_{L/K}(\gamma) \pmod{\mathfrak{m}}$, et alors, $\alpha N_{L/K}(\gamma)^{-1} \in K_{\mathfrak{m}}^*$. Or on a vu au début de la preuve que (α) était la norme d'un idéal de L , donc $(\alpha N_{L/K}(\gamma)^{-1})$ aussi. Puisque $\alpha N_{L/K}(\gamma)^{-1} \in K_{\mathfrak{m}}^*$ cet idéal est en particulier dans $I_L(\widetilde{\mathfrak{m}})$. Cela montre que $\alpha N_{L/K}(\gamma)^{-1} \in \iota^{-1}(N_{L/K}(I_L(\widetilde{\mathfrak{m}})))$. Donc, puisqu'on a choisit \mathfrak{m} de sorte que $n(\mathfrak{m}) = 1$, le Corollaire (6.3), nous dit que $\alpha N_{L/K}(\gamma)^{-1} \in N_{L/K}(L^*)$, et donc, $\alpha \in N_{L/K}(L^*)$. #

Remarque

L'hypothèse d'avoir une extension L/K cyclique est obligatoire. En effet, Hasse à montré que dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt{-39})$, le nombre 3 n'est pas une norme, mais est une norme locale partout. (Cf. [Has])

Chapitre 7 :

La loi de réciprocité d'Artin

La loi de réciprocité d'Artin nous donne une description du noyau de l'application du même nom.

Définition (7.1)

Si L/K est une extension abélienne de corps de nombres, on dit qu'un K -module est *admissible* (pour L/K) s'il est divisible par tous les idéaux premiers qui ramifient dans L et si $P_{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$.

Lemme (7.2)

Si L/K est une extension abélienne de corps de nombres et si \mathfrak{m} est admissible, alors

$$\ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}) = N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}$$

et donc $\Phi_{L/K}$ induit un isomorphisme

$$I_K(\mathfrak{m})/N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}} \simeq \text{Gal}(L/K).$$

Preuve

On sait que $N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \subset \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$ (cf. Corollaire (0.7)). Donc on a $N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$. De plus, $\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}$ est surjective (cf. Théorème (2.16)), de sorte que $[I_K(\mathfrak{m}) : \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})] = [L : K]$. Donc on a $[I_K(\mathfrak{m}) : N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}] \geq [L : K]$. Or, la première inégalité du corps de classe (cf. Théorème (2.20)) nous dit que $[I_K(\mathfrak{m}) : N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}] \leq [L : K]$. Cela prouve que $\ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}) = N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}$ (puisque'ils ont le même indice dans $I_K(\mathfrak{m})$ et que le premiers contient le second) et donc le lemme. #

Remarque

Vous aurez remarqué que pour ce lemme nous n'avons pas eu besoin de l'égalité, mais seulement de la première inégalité.

Rappel

Soit m un entier positif tel que $m \not\equiv 2 \pmod{4}$. Alors le \mathbb{Q} -module $(m) \cdot \infty$ est admissible pour l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}$ (∞ étant l'unique place infinie de \mathbb{Q}). Ce résultat est le Théorème (0.14).

Lemme (7.3)

Si L/K est une extension abélienne de corps de nombres et si \mathfrak{m} est un K -module admissible, alors tout K -module \mathfrak{m}' tel que $\mathfrak{m}_0|\mathfrak{m}'_0$ et $\mathfrak{m}_{\infty} \subset \mathfrak{m}'_{\infty}$ est aussi admissible.

Preuve

C'est clair : $\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m}')}$ est la restriction à $I_K(\mathfrak{m}')$ de $\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}$ et $P_{\mathfrak{m}'} \subset P_{\mathfrak{m}} \cap I_K(\mathfrak{m}')$. #

Remarque

Dans le rappel précédent, on peut se passer de l'hypothèse $m \not\equiv 2 \pmod{4}$. En effet, si $m \equiv 2 \pmod{4}$, il est évident (et bien connu) que $\mathbb{Q}(\zeta_m) = \mathbb{Q}(\zeta_{\frac{m}{2}})$. On a alors $(\frac{m}{2}) \cdot \infty$ est admissible pour $\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}$. Et donc, par le lemme précédent, on a $(m) \cdot \infty$ est admissible pour $\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}$.

Lemme (7.4)

Si \mathfrak{m} est un K -module admissible pour une extension abélienne L/K , alors \mathfrak{m} est aussi admissible pour E/K pour tout $L \supset E \supset K$.

Preuve

C'est clair : on sait que $\Phi_{E/K} = R \circ \Phi_{L/K}$ où $R : \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(E/K)$ est l'homomorphisme de restriction (cf. on a vu cela au Chapitre 0, p. 4). #

Lemme (7.5)

Soit L/K est une extension abélienne de corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module admissible. Soit E/K une extension (quelconque) de corps de nombres. Si $\tilde{\mathfrak{m}}$ est l'extension de \mathfrak{m} à E (voir Chapitre 0, p. 12 pour la présentation de $\tilde{\mathfrak{m}}$). Alors $\tilde{\mathfrak{m}}$ est admissible pour EL/E .

Preuve

On sait que sur $I_E(\tilde{\mathfrak{m}})$, on a $R \circ \Phi_{EL} = \Phi_{L/K} \circ N_{E/K}$ où $R : \text{Gal}(EL/E) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ est l'homomorphisme de restriction (cf. Théorème (0.6)). Pour conclure, il suffit de rappeler que R est injective et de se souvenir que $N_{E/K}(E_{\tilde{\mathfrak{m}}}^*) \subset K_{\mathfrak{m}}^*$ (cf. partie b) du Lemme (5.2)). Donc $N_{E/K}(P_{\tilde{\mathfrak{m}}}^{\infty}) \subset P_{\mathfrak{m}}$, ce qui prouve le lemme. #

Proposition (7.6)

Soit m un nombre entier positif. Soit $K \subset E \subset K(\zeta_m)$, une extension de corps de nombres. Si \mathfrak{m}' est l'extension à K du \mathbb{Q} -module $(m) \cdot \infty$ et si \mathfrak{m} est un K -module tel que $\mathfrak{m}'_0 | \mathfrak{m}_0$ et $\mathfrak{m}'_{\infty} \subset \mathfrak{m}_{\infty}$. Alors \mathfrak{m} est admissible pour E/K .

Preuve

C'est un corollaire des 4 lemmes précédents : puisque $(m) \cdot \infty$ est admissible pour $\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}$, par le Lemme (7.5), \mathfrak{m}' est admissible pour $K(\zeta_m)/K$. Par le Lemme (7.4), \mathfrak{m}' est admissible pour E/K et par le Lemme (7.3), \mathfrak{m} est admissible pour E/K . #

On a déjà montré cette proposition au Chapitre 0 (Théorème (0.16)), la preuve est ici plus simple et nous avons besoin de ce théorème pour montrer le théorème de Čebotarev pour les extensions cyclotomiques. De plus, nous aurons parfois besoin des lemmes ayant permis la nouvelle preuve de ce résultat.

Lemme (7.7)

Soient a et r des entiers supérieurs à 1 et q un nombre premier. Alors il existe p un nombre premier tel que l'ordre de $a \bmod p$ soit q^r .

Preuve

On utilise la relation

$$\begin{aligned}
 g(x) &= \frac{x^q - 1}{x - 1} = \frac{[(x - 1) + 1]^q - 1}{x - 1} \\
 &= (x - 1)^{q-1} + \cdots + \binom{q}{t} (x - 1)^{t-1} + \cdots + q \\
 &= x^{q-1} + x^{q-2} + \cdots + x + 1.
 \end{aligned}
 \tag{*}$$

Si $n \geq 2$, $g(n) \geq 3$. En particulier, $g := g(a^{q^{r-1}}) \geq 3$. Soit ℓ un diviseur premier de g .

Si ℓ ne divise pas le dénominateur de g qui est $a^{q^{r-1}} - 1$, alors $p := \ell \mid a^{q^r} - 1$, ce qui veut dire que a est d'ordre q^r modulo p , et le lemme est prouvé.

Si ℓ divise $a^{q^{r-1}} - 1$, alors la relation (*) prouve que $\ell = q$. On va montrer que dans ce cas, g n'est pas une puissance de q . On peut donc choisir un diviseur premier de g différent de q et celui-ci conviendra par ce qui précède.

- a) Si q est impair, dans la relation (*) avec $x = a^{q^{r-1}}$, $(x - 1)^{q-1}$ et les termes $\binom{q}{t} (x - 1)^{t-1}$ pour $1 < t < q$ sont divisibles par q^2 , donc $q^2 \nmid g$. Donc si g est une puissance de q , on a $g = q$. Mais c'est impossible, car la relation (*) montre que $g > q$.
- b) Si $q = 2$, $g = a^{2^{r-1}} + 1$. Si g est une puissance de 2, alors a est impair, $a = 2k + 1$. Et alors, $g = (2k + 1)^{2^{r-1}} + 1 \equiv 2 \pmod{4}$. Donc $g = 2$, mais on a vu que $g \geq 3$.

Cela prouve que g n'est pas une puissance de q et donc le lemme. //

Définition (7.8)

Dans un groupe abélien, σ et τ sont dits *indépendants* si $\langle \sigma \rangle \cap \langle \tau \rangle = \{1\}$. Deux entiers a et b sont dits *indépendants modulo m* si les classes de a et de b sont indépendants dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

Lemme (7.9)

Soient a, n des entiers supérieurs à 1. Supposons que $n = q_1^{k_1} \cdots q_s^{k_s}$ (la décomposition de n en puissance de nombres premiers). Alors il existe une infinité d'entiers sans facteurs carrés $m = p_1 \cdots p_s \cdot p'_1 \cdots p'_s$ avec $p_1 < \cdots < p_s < p'_1 < \cdots < p'_s$ premiers et p_1 arbitrairement grand, tels que :

- 1) l'ordre de a modulo m est un multiple de n .
- 2) il existe b tel que l'ordre de b modulo m est un multiple de n et a, b sont indépendants modulo m .

Preuve

On choisit successivement des entiers $r_1, \dots, r_s, r'_1, \dots, r'_s$ tels que $r_i > k_i$ pour $i = 1, \dots, s$ et des nombres premiers $p_1, \dots, p_s, p'_1, \dots, p'_s$ tel que

$$q_1^{r_1} < p_1 < q_2^{r_2} < p_2 < \cdots < q_s^{r_s} < p_s < q_1^{r'_1} < p'_1 < q_2^{r'_2} < \cdots < q_s^{r'_s} < p'_s$$

où, pour chaque i , p_i (resp. p'_i) est choisit tel que l'ordre de a modulo p_i (resp. p'_i) soit $q_i^{r_i}$ (resp. $q_i^{r'_i}$). C'est possible grâce au Lemme (7.7). Posons $m = p_1 \cdots p_s \cdot p'_1 \cdots p'_s$ (p_1 est arbitrairement grand, car on peut choisir r_1 arbitrairement grand). Clairement (thm. chinois), l'ordre de a modulo m est $q_1^{r_1} \cdots q_s^{r_s}$ qui est un multiple de n . Choisissons b tel que

$$b \equiv a \pmod{p_1 \cdots p_s}$$

$$b \equiv 1 \pmod{p'_1 \cdots p'_s}.$$

L'ordre de b modulo m est $q_1^{r'_1} \cdots q_s^{r'_s}$ qui est un multiple de n . Vérifions encore que a et b sont indépendants : supposons que $a^u \cdot b^v \equiv 1 \pmod{m}$. Alors $1 \equiv a^u \cdot b^v \equiv a^u \pmod{p'_1 \cdots p'_s}$. Donc $q_1^{r'_1} \cdots q_s^{r'_s} | u$, car l'ordre de a modulo $p'_1 \cdots p'_s$ est $q_1^{r'_1} \cdots q_s^{r'_s}$. Donc, $a^u \equiv 1 \pmod{m}$ et donc aussi $b^v \equiv 1 \pmod{m}$. $\#$

Proposition (7.10)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Posons $n = [L : K]$ et s un entier supérieur ou égal à 1. Soit \mathfrak{p} un idéal premier de K qui ne ramifie pas dans L . Alors il existe $m \geq 1$ premier à s et à \mathfrak{p} (i.e. $m \notin \mathfrak{p}$) tel que

- a) si $E = K(\zeta_m)$, alors $\Phi_{E/K}(\mathfrak{p})$ a un ordre multiple de n .
- b) $E \cap L = K$.
- c) il existe $\tau \in \text{Gal}(E/K)$ dont l'ordre est un multiple de n et qui est indépendant de $\Phi_{E/K}(\mathfrak{p})$ dans $\text{Gal}(E/K)$.
- d) $\text{Gal}(E/K) \simeq \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$.

Preuve

On applique le lemme précédent à $a = \mathbb{N}(\mathfrak{p})$ et $n = n$. On choisit $M > 1$ tel que $\mathbb{Q}(\zeta_M) \cap L$ soit le plus grand sous-corps dans une extension cyclotomique de \mathbb{Q} . C'est possible, car si $E_1 \subset L \cap \mathbb{Q}(\zeta_{n_1})$ et $E_2 \subset L \cap \mathbb{Q}(\zeta_{n_2})$, alors $L \cap \mathbb{Q}(\zeta_{\text{ppcm}(n_1, n_2)}) \supset E_1, E_2$ et on continue ainsi de suite, et ça s'arrête forcément car le degré de L est fini. On choisit m comme dans le lemme précédent de sorte que m soit premier à s , M et \mathfrak{p} (c'est possible car on a vu que le plus petit facteur premier de m peut être aussi grand qu'on veut). Alors, avec ce choix, on a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\zeta_m) \cap L \subset \mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_M) = \mathbb{Q}$. Ainsi, $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap L = \mathbb{Q}$ et *a fortiori* $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap K = \mathbb{Q}$ aussi. La théorie de Galois nous dit alors que $\text{Gal}(L(\zeta_m)/L) \simeq \text{Gal}(K(\zeta_m)/K) \simeq \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$. On a donc

$$\begin{aligned} [L(\zeta_m) : K(\zeta_m)] \cdot \varphi(m) &= [L(\zeta_m) : K(\zeta_m)] \cdot [K(\zeta_m) : K] = [L(\zeta_m) : K] \\ &= [L(\zeta_m) : L] \cdot [L : K] = \varphi(m) \cdot n. \end{aligned}$$

Donc, $[L(\zeta_m) : K(\zeta_m)] = n$. D'autre part, la théorie de Galois donne $[L : L \cap K(\zeta_m)] = [L(\zeta_m) : K(\zeta_m)] = n = [L : K]$, ce qui prouve que $L \cap K(\zeta_m) = K$, donc les parties b) et d) sont prouvées.

Par définition, $\Phi_{E/K}(\mathfrak{p})$ est l'automorphisme de E/K caractérisé par $\zeta_m \mapsto \zeta_m^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} = \zeta^a$ dont l'ordre est celui de a modulo m , qui est un multiple de n (par le lemme précédent). On a donc prouvé la partie a).

Considérons le b du lemme précédent. On regarde l'automorphisme τ de E/K défini par $\tau(\zeta_m) = \zeta_m^b$. Il est clair que τ remplit les conditions de la partie c). $\#$

Théorème (7.11)(Lemme d'Artin)

Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres. $s > 0$ un entier et \mathfrak{p} un idéal premier de K non ramifié dans L . Alors il existe $m > 0$ un entier premier à s et à \mathfrak{p} et une extension F/K telle que

- a) $L \cap F = K$
- b) $L \cap K(\zeta_m) = K$
- c) $L(\zeta_m) = F(\zeta_m)$

d) \mathfrak{p} est complètement décomposé dans F .

Preuve

Soit m et τ comme dans la proposition précédente. On choisit σ un générateur de $\text{Gal}(L/K) = G$. Alors, par la théorie de Galois, $L(\zeta_m)/K$ est une extension abélienne de groupe $G \times \text{Gal}(K(\zeta_m)/K)$. Soit F le corps fixe par le sous-groupe H engendré par les éléments

$$(\sigma, \tau) \text{ et } \Phi_{L(\zeta_m)/K}(\mathfrak{p}) = (\Phi_{L/K}(\mathfrak{p}), \Phi_{K(\zeta_m)/K}(\mathfrak{p})).$$

- a) $L \cap F$ est le sous-corps de L laissé fixe par les restrictions à L des éléments de H , donc en particulier par $(\sigma, \tau)|_L = \sigma$. Donc $L \cap F$ est le sous-corps de L laissé fixe par G , et c'est évidemment K .
- b) est donné par la proposition précédente.
- c) On a $F(\zeta_m) = F \cdot K(\zeta_m)$ est le sous-corps de $L(\zeta_m)$ fixe par $H \cap (G \times \{1\})$. Supposons que $(\sigma, \tau)^u \cdot (\Phi_{L/K}(\mathfrak{p}), \Phi_{K(\zeta_m)/K}(\mathfrak{p}))^v \in G \times \{1\}$. Comme (cf. proposition précédente) τ et $\Phi_{K(\zeta_m)/K}(\mathfrak{p})$ sont indépendants, on a τ^u et $\Phi_{K(\zeta_m)/K}(\mathfrak{p})^v = 1$. Donc, u et v sont des multiples de n (toujours grâce à la proposition précédente). Ainsi, $\sigma^u = 1$ et $(\Phi_{L/K}(\mathfrak{p}))^v = 1$, ce qui implique que $H \cap (G \times \{1\}) = \{1\} \times \{1\}$. Donc $F(\zeta_m)$ est le sous-corps de $L(\zeta_m)$ fixe par $\{1\} \times \{1\}$ qui est $L(\zeta_m)$.
- d) Si on montre que le groupe de décomposition de \mathfrak{p} dans F est trivial, alors \mathfrak{p} se décompose totalement dans F et c'est (par définition) le sous-groupe engendré par $\Phi_{F/K}(\mathfrak{p})$. Or, $\Phi_{F/K}(\mathfrak{p}) = \Phi_{L(\zeta_m)/K}(\mathfrak{p})|_F = \text{Id}_F$ (par définition de H .) Cela montre partie d). //

En corollaire à ce résultat et à sa preuve, on peut prouver le :

Corollaire (7.12)

Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$ des idéaux premiers de K , non ramifiés dans L , et pour chaque i , F_i et m_i comme dans le Lemme d'Artin associés à \mathfrak{p}_i . Alors, on peut choisir les F_i et les m_i de telle manière que si $F = F_1 \cdots F_r$, alors on a $F \cap L = K$.

Preuve

On construit F_1, m_1, τ_1 comme pour le Lemme d'Artin et la Proposition (7.10), avec $s = 1$. Ensuite, supposons avoir construit F_{i-1}, m_{i-1} et τ_{i-1} , on construit F_i, m_i et τ_i de telle manière que $s = m_1 \cdots m_{i-1}$. On rappelle que $\tau_i \in \text{Gal}(K(\zeta_{m_i})/K) = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{m_i})/\mathbb{Q}) := G_i$ et $\Phi_{K(\zeta_{m_i})/K}(\mathfrak{p}_i)$ sont indépendants et d'ordre un multiple de $n = [L : K]$ et que F_i est le sous-corps de $L(\zeta_{m_i})$ laissé fixe par H_i , le groupe engendré par (σ, τ_i) et $\Phi_{L(\zeta_{m_i})/K}(\mathfrak{p}_i)$, où σ est un générateur de $G = \text{Gal}(L/K)$. Mais, puisque les m_i sont premiers au M de la proposition (7.10), on a vu que $L \cap K(\zeta_{m_i}) = K$. On montre de la même manière que $L \cap K(\zeta_{m_1 \cdots m_r}) = K$ (car, puisque les m_i sont premiers entre eux, on a $\zeta_{m_1} \cdots \zeta_{m_s} = \zeta_{m_1 \cdots m_r}$ et $m_1 \cdots m_r$ est premier avec M). Ainsi, $L(\zeta_{m_1 \cdots m_r})/K$ est une extension abélienne de groupe $G \times \prod_{j=1}^r G_j$, et dans cette extension, pour tout i , F_i est le corps fixe pour $\widetilde{H}_i := H_i \times \prod_{j \neq i} G_j$. Finalement, $F = F_1 \cdots F_r$ est le corps fixe de $\cap_{i=1}^r \widetilde{H}_i$, et donc $F \cap L$ est le sous-corps de L fixé par les éléments de $\cap_{i=1}^r \widetilde{H}_i$ et ce dernier groupe contient $(\sigma, \tau_1, \dots, \tau_s)$ dont la restriction à L est σ qui engendre G . Donc, $F \cap L = K$. //

Voici un gros théorème qui est le théorème de réciprocité d'Artin pour les extensions cycliques.

Théorème (7.13)

Soit L/K une extension cyclique de corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module divisible par toutes les places (finies ou infinies) qui ramifient dans L et tel que

$$[L : K] = [I_K(\mathfrak{m}) : P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))]$$

(ce qui est réalisé nous l'avons vu (Théorème (6.2), égalité fondamentale) lorsque les exposants des places finies qui divisent \mathfrak{m} sont suffisamment grands). Alors \mathfrak{m} est K -admissible.

Preuve

Puisque $\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}$ est surjective (cf. Proposition (2.16)), on a évidemment l'égalité $[I_K(\mathfrak{m}) : \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})] = [L : K]$, de sorte qu'il suffit de montrer que $\ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}) \subset P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$, puisqu'ils ont le même indice dans $I_K(\mathfrak{m})$. Comme d'habitude, on pose $n = [L : K]$ et σ un générateur de $G = \text{Gal}(L/K)$. Soit $\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{m})$ tel que $\Phi_{L/K}(\mathfrak{a}) = 1$. Écrivons $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^r \mathfrak{p}_i^{a_i}$, $a_i \in \mathbb{Z}$. On applique le Corollaire (7.12) aux idéaux $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r$, fournissant donc les $F_1, \dots, F_r, m_1, \dots, m_r$ et $F = F_1 \cdots F_r$. Posons

$$\Phi_{L/K}(\mathfrak{p}_i^{a_i}) = \sigma^{d_i} \text{ avec } d_i \geq 0.$$

Le fait que $\Phi_{L/K}(\mathfrak{a}) = 1$ donne que $\sigma^d = 1$, où $d = d_1 + \dots + d_r$. Donc, $n|d$. Si \mathfrak{m}' est un F -module divisible par les idéaux premiers de F qui ramifient dans LF . Alors, puisque $F \cap L = K$, l'application $\Phi_{LF/F} : I_F(\mathfrak{m}') \rightarrow \text{Gal}(LF/F) \xrightarrow{R} G$ est une surjection, où R est la restriction à L . On choisit un tel \mathfrak{m}' qui en plus est divisible par tous les $m_i O_F$ et par $\tilde{\mathfrak{m}}_F$ (l'extension à F du K -module \mathfrak{m}). Alors il existe $\mathfrak{b}_0 \in I_F(\mathfrak{m}') \subset I_F(\tilde{\mathfrak{m}}_F)$ tel que $R(\Phi_{LF/F}(\mathfrak{b}_0)) = \sigma$. On a donc $\mathfrak{b} := N_{F/K}(\mathfrak{b}_0) \in I_K(\mathfrak{m})$ (même dans $I_K(\mathfrak{m} \cdot (m_i)) \subset I_K(\mathfrak{m})$). Par la relation $R \circ \Phi_{LF/F} = \Phi_{L/K} \circ N_{F/K}$ (cf. Théorème (0.6)), on tire

$$\Phi_{L/K}(\mathfrak{b}) = \sigma.$$

L'idéal \mathfrak{b} est la norme d'un idéal dans F_i (car $N_{F/K} = N_{F_i/K} \circ N_{F/F_i}$) et \mathfrak{p}_i aussi, car il est totalement décomposé dans F_i . Ainsi, par multiplicativité, il existe un idéal fractionnaire \mathfrak{c}_i dans F_i tel que $N_{F_i/K}(\mathfrak{c}_i) = \mathfrak{p}_i^{a_i} \cdot \mathfrak{b}^{-d_i}$. En outre, notant $\tilde{\mathfrak{m}}_i$ l'extension de \mathfrak{m} à F_i , on a que $\mathfrak{c}_i \in I_{F_i}(\tilde{\mathfrak{m}}_i \cdot (m_i))$ (car $\mathfrak{b}_0 \in I_F(\mathfrak{m}')$ et \mathfrak{p}_i est premiers à m_i (cf. Proposition (7.10)) et à \mathfrak{m} , car $\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{m})$). On a donc, en vertu du Théorème (0.6) et de ce qui précède :

$$R_i \circ \Phi_{LF_i/F_i}(\mathfrak{c}_i) = \Phi_{L/K}(N_{F_i/K}(\mathfrak{c}_i)) = \Phi_{L/K}(\mathfrak{p}_i^{a_i}) \cdot \Phi_{L/K}(\mathfrak{b})^{-d_i} = \sigma^{d_i} \cdot \sigma^{-d_i} = 1,$$

où R_i est la restriction $\text{Gal}(LF_i/F_i) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$. Comme cette restriction est une application injective, on a $\Phi_{LF_i/F_i}(\mathfrak{c}_i) = 1$. D'autre part, puisque $L(\zeta_{m_i}) = F_i(\zeta_{m_i})$ (cf. Lemme d'Artin, partie c)), on a $F_i \subset LF_i \subset F_i(\zeta_{m_i})$. Donc, en vertu de la Proposition (7.6), tout F_i -module \mathfrak{m}_i'' est admissible pourvu que \mathfrak{m}_i'' soit divisible par l'extension à F_i du \mathbb{Q} -module $(m_i) \cdot \infty$. Donc, en choisissant \mathfrak{m}_i'' le ppcm de $\tilde{\mathfrak{m}}_i$ et de l'extension à F_i de $(m_i) \cdot \infty$, on a $\mathfrak{c}_i \in I_{F_i}(\mathfrak{m}_i'')$ et puisque \mathfrak{m}_i'' est admissible et que $\mathfrak{c}_i \in \ker(\Phi_{LF_i/F_i})$, alors $\mathfrak{c}_i \in P_{\mathfrak{m}_i''} \cdot N_{LF_i/F_i}(I_{LF_i}(\tilde{\mathfrak{m}}_i''))$, où $\tilde{\mathfrak{m}}_i''$ est l'extension à LF_i de \mathfrak{m}_i'' . C'est-à-dire

$$\mathfrak{c}_i = (\gamma_i) \cdot N_{LF_i/F_i}(\mathfrak{d}_i), \quad (*)$$

où $\gamma_i \in F_{i\mathfrak{m}_i''}^*$ et $\mathfrak{d}_i \in I_{LF_i}(\tilde{\mathfrak{m}}_i'')$. Appliquant $N_{F_i/K}$ de chaque côté de l'égalité (*), on obtient

$$\mathfrak{p}_i^{a_i} \cdot \mathfrak{b}^{-d_i} = (N_{F_i/K}(\gamma_i)) \cdot N_{LF_i/K}(\mathfrak{d}_i) = (\alpha_i) \cdot N_{LF_i/K}(\mathfrak{d}_i)$$

où $\alpha_i = N_{F_i/K}(\gamma_i) \in N_{F_i/K}(F_{i\mathfrak{m}_i}^*) \subset N_{F_i/K}(F_{i\mathfrak{m}_i}^{\sim}) \subset K_{\mathfrak{m}}^*$ (la dernière inclusion vient de la partie b) du Lemme (5.2)). Ce qui veut dire que $(\alpha_i) \in P_{\mathfrak{m}}$. En faisant le produit sur tous les i , on trouve :

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}^d \cdot \prod_i (\alpha_i) \cdot \prod_i N_{L_{F_i/K}}(\mathfrak{d}_i).$$

En posant $\mathfrak{d}'_i = N_{L_{F_i/L}}(\mathfrak{d}_i) \in I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$, on trouve $\mathfrak{a} = \prod_i (\alpha_i) \cdot \mathfrak{b}^d \cdot N_{L/K}(\prod_i \mathfrak{d}'_i)$. Finalement, puisque $n|d$ et que \mathfrak{b} est un idéal de K , premier à \mathfrak{m} , on a $\mathfrak{b}^d = N_{L/K}(\mathfrak{b}^{\frac{d}{n}} \cdot O_L)$ avec $\mathfrak{b} \in I_K(\mathfrak{m})$ et $\mathfrak{b}^{\frac{d}{n}} \cdot O_L \in I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$. En résumé :

$$\mathfrak{a} = \underbrace{\left(\prod_i \alpha_i \right)}_{\in P_{\mathfrak{m}}} \cdot \underbrace{N_{L/K}(\prod_i \mathfrak{d}'_i \cdot \mathfrak{b}^{\frac{d}{n}} \cdot O_L)}_{\in N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))}.$$

#

Après ce gros morceau, on peut enfin prouver et énoncer le Théorème de réciprocité d'Artin pour les extensions abélienne. En résumé, on s'y est pris d'abord avec les extensions cyclotomiques (assez facile), puis avec les extensions cycliques (très difficile, on a besoin de l'égalité fondamentale et à peu près tout ce qui précède) et maintenant, on termine aisément avec les extensions abéliennes.

Théorème (7.14)(Théorème de réciprocité d'Artin)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module divisible par toutes les places (finies et infinies) ramifiées dans L . Si les exposants des idéaux premiers divisant \mathfrak{m}_0 sont suffisamment grands, alors \mathfrak{m} est admissible pour L/K .

Cela implique, en vertu du Lemme (7.2), l'application $\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}$ est un homomorphisme surjectif de noyau $P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$.

Preuve

Posons $G = \text{Gal}(L/K)$ et $G = C_1 \times \cdots \times C_s$, avec C_i cycliques. Posons encore $H_i = \prod_{j \neq i} C_j \times 1$ et E_i le corps fixe par H_i . La théorie de Galois nous dit que E_i/K est une extension cyclique de groupe de Galois isomorphe à C_i . Puisque \mathfrak{m} contient toutes les places qui ramifient dans L , il contient toutes les places qui ramifient dans E_i , et, puisque les exposants des idéaux premiers divisant \mathfrak{m}_0 sont suffisamment grands, alors en vertu du théorème précédent, \mathfrak{m} est admissible pour chaque extension E_i/K , ce qui veut dire que $P_{\mathfrak{m}} \subset \cap_{i=1}^s \ker(\Phi_{E_i/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$. Mais, on montre facilement, puisque $L = E_1 \cdots E_s$ que pour tout élément $\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{m})$, on a $\Phi_{L/K}(\mathfrak{a}) = (\Phi_{E_1/K}(\mathfrak{a}), \dots, \Phi_{E_s/K}(\mathfrak{a})) \in C_1 \times \cdots \times C_s = G$. Donc, $\ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}) = \cap_{i=1}^s \ker(\Phi_{E_i/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$. Cela prouve que $P_{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$ ce qui prouve le théorème.

#

Corollaire (7.15)

Le Théorème de Čebotarev fort est vrai

Preuve

Le théorème précédent est exactement le Lemme (3.8) dont nous avons besoin pour le Théorème de Čebotarev fort.

#

Corollaire (7.16)

Soit L/K une extension abélienne et E/K une extension galoisienne et \mathfrak{m} un K -module admissible pour L/K . Supposons que

$$N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}}')) \subset N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}}$$

où $\tilde{\mathfrak{m}}$, (resp. $\tilde{\mathfrak{m}}'$) est l'extension de \mathfrak{m} à L (resp. E). Alors $L \subset E$.

Preuve

En dehors d'un nombre fini d'idéaux (ceux qui pourraient diviser \mathfrak{m}), chaque idéal premier de K complètement décomposé dans E est contenu dans $N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}}'))$ (c'est la norme de n'importe quel idéal au-dessus de lui). Donc, par hypothèse, il est contenu dans $N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}} = \ker(\Phi_{L/K}(I_K(\mathfrak{m})))$, donc il est totalement décomposé dans L . On a donc que tout idéal premier de K complètement décomposé dans E est totalement décomposé dans L (sauf éventuellement un nombre fini). Cela prouve que $L \subset E$, en vertu du Théorème (2.17). #

Application

Soit L/\mathbb{Q} une extension abélienne de corps de nombres. Par la réciprocité d'Artin, il existe $\mathfrak{m} = (m) \cdot \infty$ un \mathbb{Q} -module admissible pour L/\mathbb{Q} . On peut supposer $m > 0$ entier. On sait, par ailleurs qu'il est admissible pour E/\mathbb{Q} , avec $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ et même que $\ker(\Phi_{E/\mathbb{Q}}|I_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})) = P_{\mathfrak{m}}$ (cf. Théorème (0.14)). Or, la réciprocité d'Artin nous montre que ce noyau est $P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{E/\mathbb{Q}}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}}'))$. Cela prouve que $N_{E/\mathbb{Q}}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}}')) \subset P_{\mathfrak{m}} \subset P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/\mathbb{Q}}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$, donc, en vertu du corollaire précédent, $L \subset E$.

On a donc prouvé le

Théorème (7.17)(Théorème de Kronecker-Weber)

Toute extension abélienne de \mathbb{Q} est sous-extension d'une extension cyclotomique $\mathbb{Q}(\zeta_m)$. #

Chapitre 8 :

Préparation à la formation des classes

Nous allons, dans ce chapitre, exposer les notions de sous-groupe de congruence et de conducteur, regarder quelques notions de bases sur eux. Puis nous allons énoncer théorème central de la théorie du corps de classe et faire quelques réductions.

Définition (8.1)

Soit K un corps de nombres. Un sous-groupe H de I_K est dit un *sous-groupe de congruence* s'il existe un K -module \mathfrak{m} tel que $P_{\mathfrak{m}} \subset H \subset I_K(\mathfrak{m})$. On dit alors que H est un *sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m}* .

Tout d'abord quelques remarques immédiates

Remarques

- a) Si H est un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m} , et \mathfrak{m}' est un K -module multiple de \mathfrak{m} ayant les mêmes places finies, alors H est un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m}' . En effet, dans ce cas, $P_{\mathfrak{m}'} \subset P_{\mathfrak{m}}$ et $I_K(\mathfrak{m}') = I_K(\mathfrak{m})$.
- b) Soit H un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' est un autre K -module multiple de \mathfrak{m} (le produit de deux K -modules se fait par produit au niveau des idéaux et par union au niveau des places infinies, cf. Chapitre 0 pour plus de détails). Alors $H \cap I_K(\mathfrak{m}')$ est un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m}' . En effet, il est clair que

$$\begin{array}{ccc} I_K(\mathfrak{m}') & \subset & I_K(\mathfrak{m}) \\ \cup & & \cup \\ P_{\mathfrak{m}'} & \subset & P_{\mathfrak{m}} \end{array}.$$

Donc $P_{\mathfrak{m}'} \subset P_{\mathfrak{m}} \cap I_K(\mathfrak{m}') \subset H \cap I_K(\mathfrak{m}') \subset I_K(\mathfrak{m}')$.

Définition (8.2)

On dira que deux sous-groupes de congruence H et H' sont *équivalents* s'il existe un K -module \mathfrak{m}'' tel que

$$H \cap I_K(\mathfrak{m}'') = H' \cap I_K(\mathfrak{m}'').$$

Il est clair que si \mathfrak{m}''' est un multiple de \mathfrak{m}'' , alors on a aussi $H \cap I_K(\mathfrak{m}''') = H' \cap I_K(\mathfrak{m}''')$ (puisque $I_K(\mathfrak{m}''') \subset I_K(\mathfrak{m}'')$). Ainsi, on a bien affaire à une relation d'équivalence. De plus, si H (resp. H') sont définis pour \mathfrak{m} (resp. \mathfrak{m}'), alors on peut toujours choisir pour \mathfrak{m}'' un multiple commun de \mathfrak{m} et de \mathfrak{m}' (par exemple le ppcm de $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ et \mathfrak{m}''), ainsi $H \cap I_K(\mathfrak{m}'')$ sera un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m}'' .

Lemme (8.3)

Si \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 sont des K -modules tels que $\mathfrak{m}_1 | \mathfrak{m}_2$ et pour $i = 1, 2$, H_i est un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m}_i tel que $H_2 = H_1 \cap I_K(\mathfrak{m}_2)$, alors on a

- a) $I_K(\mathfrak{m}_2)/H_2 \simeq I_K(\mathfrak{m}_1)/H_1$
- b) $H_1 = H_2 \cdot P_{\mathfrak{m}_1}$.

En particulier la partie b) implique que si H_2 provient de H_1 et que \mathfrak{m}_1 est fixé, alors H_1 est unique.

Preuve

On montre d'abord que

$$I_K(\mathfrak{m}_1) = I_K(\mathfrak{m}_2) \cdot P_{\mathfrak{m}_1}. \quad (*)$$

L'inclusion \supset est triviale. Réciproquement, soit $\mathfrak{a}_1 \in I_K(\mathfrak{m}_1)$. On peut l'écrire $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}_2$ avec $\mathfrak{a}_2 \in I_K(\mathfrak{m}_2)$ et $\mathfrak{a} = \prod_i \mathfrak{p}_i^{a_i}$, où les \mathfrak{p}_i sont les idéaux premiers qui divisent \mathfrak{m}_2 , mais pas \mathfrak{m}_1 . Par le théorème d'approximation débile (Théorème (0.3)), il existe, pour tout i , $\pi_i \in K$ tel que $\pi_i \in \mathfrak{p}_i \setminus \mathfrak{p}_i^2$ et $\pi_i \equiv^* 1 \pmod{\mathfrak{m}_1}$. Alors $\alpha = \prod_i \pi_i^{a_i} \in K_{\mathfrak{m}_1}^*$ et $\mathfrak{a}(\alpha)^{-1}$ est premier à \mathfrak{m}_2 (par unicité de la décomposition d'un idéal en puissances d'idéaux premiers). Ainsi,

$$\mathfrak{a}_1 = \underbrace{\mathfrak{a}(\alpha)^{-1}}_{\in I_K(\mathfrak{m}_2)} \cdot \underbrace{\mathfrak{a}_2}_{\in I_K(\mathfrak{m}_2)} \cdot \underbrace{(\alpha)}_{\in P_{\mathfrak{m}_1}} \in I_K(\mathfrak{m}_2) \cdot P_{\mathfrak{m}_1}.$$

On a *a fortiori* $I_K(\mathfrak{m}_1) = I_K(\mathfrak{m}_2) \cdot H_1$ (car $P_{\mathfrak{m}_1} \subset H_1 \subset I_K(\mathfrak{m}_1)$). Alors,

$$I_K(\mathfrak{m}_2)/H_2 = I_K(\mathfrak{m}_2)/(H_1 \cap I_K(\mathfrak{m}_2)) \stackrel{\text{thm. d'isom.}}{\simeq} (I_K(\mathfrak{m}_2) \cdot H_1)/H_1 = I_K(\mathfrak{m}_1)/H_1,$$

prouvant a).

Pour la partie b), il est déjà clair que $H_2 \cdot P_{\mathfrak{m}_1} \subset H_1$. On va montrer que ces deux groupes ont le même indice dans $I_K(\mathfrak{m}_1)$, ce qui permettra de conclure. Cette première inclusion implique que

$$H_2 \subset (P_{\mathfrak{m}_1} \cdot H_2) \cap I_K(\mathfrak{m}_2) \subset H_1 \cap I_K(\mathfrak{m}_2) = H_2.$$

On en déduit que $H_2 = (P_{\mathfrak{m}_1} \cdot H_2) \cap I_K(\mathfrak{m}_2)$. D'où,

$$\begin{aligned} I_K(\mathfrak{m}_1)/H_1 &\stackrel{a)}{\simeq} I_K(\mathfrak{m}_2)/H_2 = I_K(\mathfrak{m}_2)/((P_{\mathfrak{m}_1} \cdot H_2) \cap I_K(\mathfrak{m}_2)) \stackrel{\text{thm. d'isom.}}{\simeq} \underbrace{(I_K(\mathfrak{m}_2) \cdot H_2 \cdot P_{\mathfrak{m}_1})}_{= I_K(\mathfrak{m}_2)} / (H_2 \cdot P_{\mathfrak{m}_1}) \\ &\stackrel{(*)}{=} I_K(\mathfrak{m}_1)/(H_2 P_{\mathfrak{m}_1}). \end{aligned}$$

On a donc bien $[I_K(\mathfrak{m}_1) : H_2 \cdot P_{\mathfrak{m}_1}] = [I_K(\mathfrak{m}_1) : H_1]$, et c'est ce qu'il fallait pour montrer la partie b) ~~///~~

Lemme (8.4)

Soit H_1 et H_2 des sous-groupes de congruence définis pour \mathfrak{m}_1 , respectivement \mathfrak{m}_2 , équivalents. Alors si $\mathfrak{m} = \text{pgcd}(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$ (par convention, $\text{pgcd}(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}') = \text{pgcd}(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}'_0) \cdot (\mathfrak{m}_\infty \cap \mathfrak{m}'_\infty)$, pour tout K -modules \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' , cf. Chapitre 0 pour plus de détails), il existe un sous-groupe de congruence H défini pour \mathfrak{m} tel que $H \cap I(\mathfrak{m}_i) = H_i$.

Preuve

Soit \mathfrak{m}_3 un K -module multiple de \mathfrak{m}_1 et de \mathfrak{m}_2 tel que $H_3 := H_1 \cap I_K(\mathfrak{m}_3) = H_2 \cap I_K(\mathfrak{m}_3)$, c'est possible (cf. Définition (8.2)). On pose

$$H = H_3 \cdot P_{\mathfrak{m}}.$$

On va voir que H a toutes les bonnes propriétés. Tout d'abord, $P_{\mathfrak{m}} \subset H \subset I_K(\mathfrak{m})$, car $H_3 \subset I_K(\mathfrak{m}_3) \subset I_K(\mathfrak{m})$. On va montrer que

$$H \cap I_K(\mathfrak{m}_3) = H_3. \quad (*)$$

Cela suffit pour montrer le lemme. En effet, considérons les groupes H_1 et $H \cap I_K(\mathfrak{m}_1)$. Il sont les deux des groupes de congruence pour \mathfrak{m}_1 (pour H_1 , c'est l'hypothèse et pour $H \cap I_K(\mathfrak{m}_1)$, on a $H = H_3 \cdot P_{\mathfrak{m}} \supset P_{\mathfrak{m}_1}$). Par (*) et puisque $I_K(\mathfrak{m}_3) \subset I_K(\mathfrak{m}_1)$, on a $I_K(\mathfrak{m}_3) \cap H_1 = I_K(\mathfrak{m}_3) \cap (H \cap I_K(\mathfrak{m}_1)) = H_3$. En vertu du Lemme (8.3), on a donc $H_1 = H_3 \cdot P_{\mathfrak{m}_1} = H \cap I_K(\mathfrak{m}_1)$. Et on montre de la même manière que $H_2 = H \cap I_K(\mathfrak{m}_2)$.

Reste à prouver la relation (*). Le fait que $H_3 \subset H \cap I_K(\mathfrak{m}_3)$ est trivial. Réciproquement, soit $\mathfrak{a} \cdot (\alpha) \in H \cap I_K(\mathfrak{m}_3)$, avec $\mathfrak{a} \in H_3$ et $\alpha \in K_{\mathfrak{m}}^*$. Puisque \mathfrak{a} et $\mathfrak{a} \cdot (\alpha) \in I_K(\mathfrak{m}_3)$, \mathfrak{a}^{-1} aussi et donc (α) aussi. Nous cherchons $\beta \in K^*$ tel que

$$\beta \in K_{\mathfrak{m}_1}^* \text{ et } \alpha\beta^{-1} \in K_{\mathfrak{m}_2}^* \text{ et } (\beta) \in I_K(\mathfrak{m}_3). \quad (**)$$

Supposons l'existence d'un tel β . D'une part, $\mathfrak{a} \cdot (\beta) \in H_3 \cdot P_{\mathfrak{m}_1} \stackrel{\text{Lemme (8.3)}}{=} H_1$. D'autre part, $\mathfrak{a} \cdot (\beta) \in I_K(\mathfrak{m}_3)$. On en déduit donc que $\mathfrak{a} \cdot (\beta) \in H_1 \cap I_K(\mathfrak{m}_3) = H_3$. Puis, $\mathfrak{a} \cdot (\alpha) = \mathfrak{a} \cdot (\beta) \cdot (\alpha\beta^{-1}) \in H_3 P_{\mathfrak{m}_2} \stackrel{\text{Lemme (8.3)}}{=} H_2$. Et enfin,

$$\mathfrak{a} \cdot (\alpha) \in H_2 \cap I_K(\mathfrak{m}_3) = H_3.$$

Montrons l'existence de β satisfaisant (**). Supposons que la place $\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_3$ mais ne divise pas \mathfrak{m}_1 ni \mathfrak{m}_2 , alors on demande que $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Si $\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_1$ ou \mathfrak{m}_2 , posons \mathfrak{p}^{a_i} l'exacte puissance de \mathfrak{p} qui divise \mathfrak{m}_i , $i = 1, 2$. Si $a_1 > a_2$, on demande que $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{a_1}}$. Dans ce cas-là, \mathfrak{p}^{a_2} est l'exacte puissance de \mathfrak{p} qui divise $\mathfrak{m} = \text{pgcd}(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)$. Donc on a $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{a_2}}$. Mais puisque $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{a_2}}$, on a $\alpha\beta^{-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{a_2}}$ (si $a_2 = 0$, on n'a pas besoin de cette équivalence). Enfin, si $a_1 \leq a_2$, on demande que $\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}^{a_2}}$. Dans ce cas, \mathfrak{p}^{a_1} est l'exacte puissance de \mathfrak{p} qui divise \mathfrak{m} , donc $\alpha \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{a_1}}$, et comme *a fortiori* $\beta \equiv \alpha \pmod{\mathfrak{p}^{a_1}}$, on a $\beta \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}^{a_1}}$. Un tel β existe en vertu du théorème d'approximation débile (Théorème (0.3)) et il satisfait clairement les conditions (**) ce qui montre notre lemme. $\#$

Corollaire-Définitions (8.5)

Soit \mathbb{H} une classe d'équivalence de sous-groupes de congruence. Alors il existe un K -module \mathfrak{f} appelé le conducteur de \mathbb{H} qui a la propriété suivante : pour chaque multiple \mathfrak{m} de \mathfrak{f} , \mathbb{H} contient un unique sous-groupe de congruence, noté $H(\mathfrak{m})$, défini pour \mathfrak{m} , et

$$\mathbb{H} = \{H(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{f}|\mathfrak{m}\} \text{ et en particulier } H(\mathfrak{m}) = H(\mathfrak{f}) \cap I_K(\mathfrak{m}) \text{ pour tout } \mathfrak{m} \text{ multiple de } \mathfrak{f}.$$

D'autre part, si \mathbb{H} et \mathbb{H}' sont des classes d'équivalence de sous-groupes de congruence, on dira que $\mathbb{H} \subset \mathbb{H}'$ s'il existe un K -module \mathfrak{m} tel que $H(\mathfrak{m}) \subset H'(\mathfrak{m})$. On a alors

$$\mathbb{H} \subset \mathbb{H}' \iff \mathfrak{f}'|\mathfrak{f}$$

et dans ce cas, $H(\mathfrak{m}) \subset H'(\mathfrak{m})$ pour tout $\mathfrak{f}|\mathfrak{m}$.

Preuve

C'est un corollaire facile des Lemmes (8.3) et (8.4) : si H_1 et $H_2 \in \mathbb{H}$ sont deux groupes définis pour \mathfrak{m} , le Lemme (8.4), appliqué à $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$, nous montre que $H_1 = H_2$. D'autre part, posons \mathfrak{f} le pgcd de tous les K -modules pour lesquels un sous-groupe de congruence est dans \mathbb{H} . Par le Lemme (8.4), il existe un unique groupe de congruence $H(\mathfrak{f})$ défini pour \mathfrak{f} tel que pour tout $H(\mathfrak{m}) \in \mathbb{H}$ défini pour \mathfrak{m} , on ait $H(\mathfrak{m}) = H(\mathfrak{f}) \cap I_K(\mathfrak{m})$. Enfin, pour tout multiple \mathfrak{m} de \mathfrak{f} , on a en vertu de la remarque qui précède la Définition (8.2), que $H(\mathfrak{f}) \cap I_K(\mathfrak{m})$ est un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m} équivalent à $H(\mathfrak{f})$.

Supposons maintenant que $\mathbb{H} \subset \mathbb{H}'$, donc l'existence d'un \mathfrak{m} tel que $H(\mathfrak{m}) \subset H'(\mathfrak{m})$. On sait grâce à la première partie que $H(\mathfrak{m}) = H(\mathfrak{f}) \cap I_K(\mathfrak{m})$ et grâce au Lemme (8.3) que $I_K(\mathfrak{f})/H(\mathfrak{f}) \simeq I_K(\mathfrak{m})/H(\mathfrak{m})$ et cet isomorphisme est donc induit par les inclusions. On est donc dans la situation :

$$\begin{array}{ccccccc} P_{\mathfrak{f}} & \subset & H(\mathfrak{f}) & \subset & ? & \subset & I_K(\mathfrak{f}) \\ \cup & & \cup & & & & \cup \\ P_{\mathfrak{m}} & \subset & H(\mathfrak{m}) & \subset & H'(\mathfrak{m}) & \subset & I_K(\mathfrak{m}) \end{array}$$

Il existe donc un unique sous-groupe V tel que $H(\mathfrak{f}) \subset V \subset I_K(\mathfrak{f})$ tel que $H'(\mathfrak{m}) = V \cap I_K(\mathfrak{m})$. Donc, V est un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{f} équivalent à $H'(\mathfrak{m})$, ainsi $V = H'(\mathfrak{f}) \in \mathbb{H}'$ ce qui prouve que $\mathfrak{f}'|\mathfrak{f}$ et que $H(\mathfrak{f}) \subset H(\mathfrak{f}')$. Finalement, $H(\mathfrak{m}) = H(\mathfrak{f}) \cap I_K(\mathfrak{m}) \subset H(\mathfrak{f}') \cap I_K(\mathfrak{m}) = H'(\mathfrak{m})$ pour tout $\mathfrak{f}|\mathfrak{m}$. \neq

Application-Définition (8.6)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres de groupe de Galois G . Soit \mathfrak{m} un K -module admissible (cf. Définition (7.1)). Posons $H(\mathfrak{m})$ le noyau de l'application d'Artin $\Phi_{L/K} : I_K(\mathfrak{m}) \rightarrow G$. C'est un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m} . Il est clair que pour tout autre K -module admissible \mathfrak{m}' , les sous-groupes $H(\mathfrak{m})$ et $H(\mathfrak{m}')$ sont équivalents; donc tous ces groupes définissent une unique classe d'équivalence de sous-groupes de congruence qu'on notera

$$\mathbb{H}(L/K).$$

Le K -module qui est le conducteur de cette classe d'équivalence s'appellera *le conducteur de L/K* , qu'on notera $\mathfrak{f}(L/K)$.

Remarquons que si \mathfrak{m} est un K -module avec $\mathfrak{f}(L/K)|\mathfrak{m}$, cela n'implique pas forcément que \mathfrak{m} est admissible, même si le groupe $H(\mathfrak{m})$ existe, mais n'est pas forcément le noyau de l'application d'Artin restreinte à $I_K(\mathfrak{m})$. Néanmoins on a le résultat :

Lemme (8.7)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Considérons $\mathbb{H}(L/K) = \{H(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{f}|\mathfrak{m}\}$, où $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(L/K)$. Supposons que \mathfrak{m} soit un K -module divisible par toutes les places (finies ou infinies) qui ramifient dans L et que $\mathfrak{f}|\mathfrak{m}$. Alors \mathfrak{m} est admissible pour L/K .

Preuve

Le théorème de réciprocité d'Artin (cf. Théorème (7.14)) nous assure l'existence d'un K -module \mathfrak{n} admissible, qui est un multiple de \mathfrak{m} et divisible par les même place que \mathfrak{m} , ainsi, $I_K(\mathfrak{m}) = I_K(\mathfrak{n})$, et donc, en vertu du Corollaire-Définitions (8.5), $H(\mathfrak{m}) = I_K(\mathfrak{m}) \cap H(\mathfrak{f}) = I_K(\mathfrak{n}) \cap H(\mathfrak{f}) = H(\mathfrak{n})$. Pour

la même raison que $I_K(\mathfrak{m}) = I_K(\mathfrak{n})$, on a aussi $\ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{n})}) = \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$. Puisque \mathfrak{n} est admissible, alors $H(\mathfrak{n}) = \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{n})})$, et donc, $H(\mathfrak{m}) = \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$. Or, puisque $H(\mathfrak{m})$ est un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m} , on a $P_{\mathfrak{m}} \subset H(\mathfrak{m}) = \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$, ce qui veut dire que \mathfrak{m} est admissible. #

Voici un petit lemme facile qui sera utile dans bien longtemps (au Théorème (11.3)) mais qui peut sans autre être énoncé ici

Lemme (8.8)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Soit $f = f(L/K)$ le conducteur de L/K . Soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ une place. Supposons que $\mathfrak{p} \nmid f$, alors \mathfrak{p} ramifie dans L

Preuve

C'est aussi un corollaire du théorème de réciprocité d'Artin (cf. Théorème (7.14)) : supposons que $\mathfrak{p} \nmid f$ et que \mathfrak{p} ne ramifie pas dans L . Par le dit théorème de réciprocité, il existe un K -module admissible \mathfrak{m} tel que $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$. Mais puisqu'il est admissible, $f|\mathfrak{m}$ et donc $\mathfrak{p}|\mathfrak{m}$, ce qui est une contradiction. On a donc montré que \mathfrak{p} doit ramifier dans L . #

Voici un résultat important :

Proposition (8.9)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Alors la correspondance

$$L/K \mapsto \mathbb{H}(L/K)$$

est injective. Mieux : si L/K et L'/K sont des extensions abéliennes contenues dans une même clôture algébrique de K , on a

$$L \subset L' \iff \mathbb{H}(L/K) \supset \mathbb{H}(L'/K).$$

Preuve

Si $L \subset L'$, et si \mathfrak{m} est un K -module admissible pour L'/K , alors \mathfrak{m} est aussi admissible pour L/K (Lemme (7.4)) et on a clairement que $H'(\mathfrak{m}) \subset H(\mathfrak{m})$, car $\Phi_{L/K} = \Phi_{L'/K}|_L$, ce qui montre que $\mathbb{H}(L'/K) \subset \mathbb{H}(L/K)$. Réciproquement, supposons que $\mathbb{H}(L'/K) \subset \mathbb{H}(L/K)$. Puisque les idéaux premiers qui se décomposent totalement dans L' sont dans le noyau de $\Phi_{L'/K}$, alors (sauf éventuellement pour un nombre fini : ceux qui diviseraient le conducteur de L'/K) ces idéaux décomposent complètement dans L . Cela prouve, grâce au Théorème (2.17), que $L \subset L'$. #

Nous pouvons alors énoncer un des théorèmes centraux de la théorie du corps de classe qui dit essentiellement que la correspondance qui précède est surjective :

Théorème (8.10)(Théorème d'existence du corps de classe)

Soit K un corps de nombres. Alors pour toute classe \mathbb{H} d'équivalence de sous-groupes de congruence de K , il existe une extension abélienne L/K telle que $\mathbb{H} = \mathbb{H}(L/K)$. On dit alors que L/K est le corps de classe de \mathbb{H} (on devrait plutôt dire le corps de la classe \mathbb{H}).

On ne va pas prouver ce théorème en un clin d'oeil. On va d'abord faire des réductions pour la preuve finale.

Définition (8.11)

Si $\mathbb{H} = \{H(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{f}|\mathfrak{m}\}$ est une classe d'équivalence de sous-groupes de congruence. On a vu au Lemme (8.4) que les groupes $I_K(\mathfrak{m})/H(\mathfrak{m})$ sont isomorphes canoniquement. On notera ce groupe I_K/\mathbb{H} .

Théorème (8.12)

Soit K un corps de nombres. Soit \mathbb{H}_0 et \mathbb{H}_1 des classes de sous-groupes de congruence de K . Supposons que $\mathbb{H}_0 \subset \mathbb{H}_1$ et que \mathbb{H}_0 possède un corps de classe L . Alors \mathbb{H}_1 en possède aussi un (c'est une sous-extension de L).

Preuve

Supposons donc que $\mathbb{H}_0 = \mathbb{H}(L/K)$ et posons, pour $i = 1, 2$, \mathfrak{f}_i le conducteur de \mathbb{H}_i . Si \mathfrak{m} est un K -module admissible pour L/K . Alors, en vertu du “Corollaire-Définitions (8.5)”, on a $\mathfrak{f}_1|\mathfrak{f}_0|\mathfrak{m}$ et $P_{\mathfrak{m}} \subset H_0(\mathfrak{m}) \subset H_1(\mathfrak{m}) \subset I_K(\mathfrak{m})$ où $H_i(\mathfrak{m})$ est le sous-groupe de congruence de \mathbb{H}_i défini pour \mathfrak{m} . Soit $G = \text{Gal}(L/K)$ et posons $G_1 = \Phi_{L/K}(H_1(\mathfrak{m}))$ et E le corps fixe pour G_1 . L'application d'Artin $\Phi_{E/K}$ est définie sur $I_K(\mathfrak{m})$ (car \mathfrak{m} contient tous les idéaux qui ramifient dans L , donc dans E) et $\Phi_{E/K} = R \circ \Phi_{L/K}$ où R est la restriction $G \rightarrow \text{Gal}(E/K) = G/G_1$. Si $\mathfrak{a} \in H_1(\mathfrak{m})$, on a, par définition de G_1 , $\Phi_{E/K}(\mathfrak{a}) = 1 \in G/G_1$, donc $H_1(\mathfrak{m}) \subset \ker(\Phi_{E/K})$. Mais on a

$$\begin{aligned} [I_K(\mathfrak{m}) : \ker(\Phi_{E/K})] &= |G/G_1| = [G : G_1] \\ &\stackrel{\Phi_{L/K} \text{ surjective}}{=} [\Phi_{L/K}(I_K(\mathfrak{m})) : \Phi_{L/K}(H_1(\mathfrak{m}))] \\ &\stackrel{\text{Lemme (6.1)}}{=} \frac{[I_K(\mathfrak{m}) : H_1(\mathfrak{m})]}{[H_0(\mathfrak{m}) : \underbrace{H_0(\mathfrak{m}) \cap H_1(\mathfrak{m})}_{=H_0(\mathfrak{m})}]} = [I_K(\mathfrak{m}) : H_1(\mathfrak{m})]. \end{aligned}$$

Donc, $H_1(\mathfrak{m}) = \ker(\Phi_{E/K})$ (restreint à $I_K(\mathfrak{m})$) et donc $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}(E/K)$. #

Définition (8.13)

Soit E/K une extension de corps de nombres et $\mathbb{H} = \{H(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{f}|\mathfrak{m}\}$ une classe de sous-groupes de congruence de K . Si $H(\mathfrak{m}) \in \mathbb{H}$, on pose

$$H_E(\tilde{\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \mid N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{m})\}.$$

Le lemme suivant montrera que tous les $H_E(\tilde{\mathfrak{m}})$ sont des sous-groupes de congruence pour $\tilde{\mathfrak{m}}$ et sont tous équivalents. On pose \mathbb{H}_E la classe de sous-groupes de congruence engendrés par les $H_E(\tilde{\mathfrak{m}})$. Le conducteur de cette classe est donc un diviseur de $\tilde{\mathfrak{f}}$ où \mathfrak{f} est le conducteur de \mathbb{H} . On vérifie aussi que si $K \subset E \subset F$ est une “tour” de corps de nombres, alors on a $(\mathbb{H}_E)_F = \mathbb{H}_F$.

Lemme (8.14)

Sous les mêmes hypothèses que pour la définition précédente, alors tous les $H_E(\tilde{\mathfrak{m}})$ sont des sous-groupes de congruence pour $\tilde{\mathfrak{m}}$ et sont tous équivalents.

Preuve

Puisque $N_{E/K}(E_{\mathfrak{m}}^*) \subset K_{\mathfrak{m}}^*$ (partie b) du Lemme (5.2)), on en déduit alors que $N_{E/K}(P_{\mathfrak{m}}) \subset P_{\mathfrak{m}}$ et donc, de $P_{\mathfrak{m}} \subset H(\mathfrak{m}) \subset I_K(\mathfrak{m})$, suit $P_{\mathfrak{m}} \subset H_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \subset I_E(\tilde{\mathfrak{m}})$. Donc $H_E(\tilde{\mathfrak{m}})$ est bien un sous-groupe de congruence pour $\tilde{\mathfrak{m}}$.

Supposons que $\mathfrak{m}|\mathfrak{m}'$ (par exemple on peut prendre $\mathfrak{m} = \mathfrak{f}$). On a donc $H(\mathfrak{m}') = H(\mathfrak{m}) \cap I_K(\mathfrak{m}')$. Alors on a

$$H_E(\tilde{\mathfrak{m}}') = \{\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}') \mid N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{m}') = H(\mathfrak{m}) \cap I_K(\mathfrak{m}')\} \subset I_E(\tilde{\mathfrak{m}}') = I_E(\tilde{\mathfrak{m}}') \cap H_E(\tilde{\mathfrak{m}}).$$

En effet : puisque $\mathfrak{m}|\mathfrak{m}'$, on a $I_K(\mathfrak{m}) \supset I_K(\mathfrak{m}')$ et donc $I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \supset I_E(\tilde{\mathfrak{m}}')$, il est clair que $H_E(\tilde{\mathfrak{m}}') \subset I_E(\tilde{\mathfrak{m}}') \cap H_E(\tilde{\mathfrak{m}})$. Inversement, si $\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}') \cap H_E(\tilde{\mathfrak{m}})$, alors $N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{m}) \cap I_K(\mathfrak{m}')$, car $N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}}')) \subset I_K(\mathfrak{m}')$ par définition et $N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{m})$ par hypothèse. Cela prouve notre lemme. \neq

Théorème (8.15)

Soit E/K une extension cyclique de corps de nombres et \mathbb{H} une classe de sous-groupes de congruence pour K . Supposons que \mathbb{H}_E ait un corps de classe L/E , alors \mathbb{H} a aussi un corps de classe.

Preuve

Si \mathfrak{f} est le conducteur de \mathbb{H} , choisissons un K -module \mathfrak{m} tel que $\mathfrak{f}|\mathfrak{m}$ et tel que $\tilde{\mathfrak{m}}$ soit admissible pour L/E (c'est possible en vertu du théorème de réciprocité d'Artin (Théorème (7.14))). Alors

$$H_E(\tilde{\mathfrak{m}}) = \ker(\Phi_{L/E} : I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \longrightarrow \text{Gal}(L/E)).$$

Nous allons montrer que l'extension L/K est galoisienne (même abélienne) et que $\mathbb{H}(L/K) \subset \mathbb{H}$ ce qui achevera la preuve en vertu du Théorème (8.12).

- a) L/K est galoisienne. En effet, soit $\sigma : L \rightarrow \mathbb{C}$ un K -morphisme (on peut voir L comme un sous-corps de \mathbb{C}). Il suffit de montrer que $\sigma(L) = L$. D'abord, $\sigma(E) = E$, puisque E/K est galoisienne. On a que $\sigma(L)/E$ est le corps de classe de $\sigma(\mathbb{H}_E)$ (on applique σ aux idéaux des groupes de \mathbb{H}_E). Alors, puisque \mathfrak{m} est un K -module, $\tilde{\mathfrak{m}}$ est invariant par σ , donc $I_E(\tilde{\mathfrak{m}})$ l'est aussi, donc :

$$\begin{aligned} \sigma(H_E(\tilde{\mathfrak{m}})) &= \{\sigma(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \text{ et } N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{m})\} \\ &= \{\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \mid N_{E/K}(\sigma|_E^{-1}(\mathfrak{a})) \in H(\mathfrak{m})\} \\ &= \{\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \mid N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{m})\} = H_E(\tilde{\mathfrak{m}}), \end{aligned}$$

L'avant dernière égalité vient du fait que $\sigma|_E$ est un K -automorphisme de E , donc un élément du groupe de galois de E/K qui ne change pas la norme d'un idéal. Cela prouve que $\sigma(\mathbb{H}_E) = \mathbb{H}_E$, donc que $\sigma(L) = L$ par l'injectivité de la correspondance vue à la Proposition (8.9).

- b) L/K est abélienne. En effet, choisissons $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ tel que $\sigma|_E$ engendre $\text{Gal}(E/K)$ (qui est cyclique par hypothèse). Ainsi, tout élément $\mu \in \text{Gal}(L/K)$ est tel que $\mu|_E = \sigma^a|_E$ pour un certain $a \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $\mu \cdot \sigma^{-a} = \tau \in \text{Gal}(L/E)$. Ce qui veut dire que $\mu = \sigma^a \cdot \tau$. Donc, pour montrer que $\text{Gal}(L/K)$ est abélien, il suffit de montrer que $\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$ pour tout $\tau \in \text{Gal}(L/E)$. Soit donc un tel τ . Puisque l'application d'Artin est surjective (cf. Théorème (2.16)), il existe $\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}})$ tel que $\Phi_{L/E}(\mathfrak{a}) = \tau$. On a donc $\sigma\tau\sigma^{-1} = \sigma\Phi_{L/E}(\mathfrak{a})\sigma^{-1} = \Phi_{L/E}(\sigma(\mathfrak{a}))$. Or, on a $N_{E/K}(\frac{\mathfrak{a}}{\sigma(\mathfrak{a})}) =$

$O_K = 1_{H(\mathfrak{m})} \in H(\mathfrak{m})$. Cela prouve que $\frac{\mathfrak{a}}{\sigma(\mathfrak{a})} \in H_E(\mathfrak{m}) = \ker(\Phi_{L/E})$ par hypothèse. Et donc, on a $\Phi_{L/E}(\sigma(\mathfrak{a})) = \Phi_{L/E}(\mathfrak{a}) = \tau$. On a alors prouvé que $\sigma \cdot \tau \cdot \sigma^{-1} = \tau$ donc, $\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$. Ce qui montre que L/K est abélienne. Elle est jolie cette preuve, vous ne trouvez pas ?

Terminons la preuve. Le raisonnement que nous venons de faire est valable pour tout K -module multiple de \mathfrak{m} (ça ne change pas la classe). Donc on peut supposer en plus que \mathfrak{m} soit admissible pour L/K . C'est-à-dire que $P_{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K} : I_K(\mathfrak{m}) \rightarrow \text{Gal}(L/K)) \subset I_K(\mathfrak{m})$. D'autre part, puisque \mathbb{H} est une classe de sous-groupe de congruence, on a aussi $P_{\mathfrak{m}} \subset H(\mathfrak{m}) \subset I_K(\mathfrak{m})$. Comme $\tilde{\mathfrak{m}}$ est admissible pour L/E et que $H_E(\tilde{\mathfrak{m}}) = \ker(\Phi_{L/E} : I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \rightarrow \text{Gal}(L/E))$, on a en vertu du corollaire du Théorème (0.7) que $N_{L/E}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \subset H_E(\tilde{\mathfrak{m}})$, où $\tilde{\mathfrak{m}}$ est le L -module au-dessus de \mathfrak{m} et de $\tilde{\mathfrak{m}}$. Ce qui veut dire par définition et par propriété de la norme que $N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \subset H(\mathfrak{m})$. Ainsi, on a :

$$P_{\mathfrak{m}} \subset P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) \subset H(\mathfrak{m}) \subset I_K(\mathfrak{m}).$$

Puisque \mathfrak{m} est admissible pour L/K , le Lemme (7.2) montre que $P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})) = \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$. On a donc prouvé que $\mathbb{H}(L/K) \subset \mathbb{H}$ et donc, en vertu du Théorème (8.12), que \mathbb{H} a aussi un corps de classe. #

Théorème (8.16)(réduction)

Le théorème d'existence (notre Théorème (8.10)) est vrai si on montre le résultat suivant :

Si \mathbb{H} est une classe de sous-groupes de congruence de K et s'il existe un entier n tel que

- a) K contient une racine primitive n -ième de l'unité*
- b) n est un exposant de I_K/\mathbb{H} (rappel : l'exposant d'un groupe est le ppcm des ordres de ses éléments, par extension, un exposant est un entier n tel que x^n est l'élément unité pour tout x dans le groupe), alors \mathbb{H} admet un corps de classe.*

Preuve

Supposons donc le résultat démontré et soit \mathbb{H} une classe de sous-groupes de congruence d'un corps de classe K . Posons n l'exposant de I_K/\mathbb{H} , soit β une racine primitive n -ième de l'unité et $E := K(\beta)$. Montrons que n est un exposant pour I_E/\mathbb{H}_E . On choisit des corps K_i tels que

$$K = K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_t = K(\beta) = E,$$

et tels que K_i/K_{i-1} soit cyclique, pour tout $i = 2, \dots, t$ (partant de E , on prend le corps fixe par le sous-groupe engendré par un élément, qui donne K_{t-1} , etc..., jusqu'à obtenir K). On définit alors les classes suivantes : $\mathbb{H}_1 = \mathbb{H}, \mathbb{H}_2, \dots, \mathbb{H}_t = \mathbb{H}_E$, \mathbb{H}_i étant la classe de sous-groupes de congruence de K_i définies pour tout $i > 1$ par

$$\mathbb{H}_i = (\mathbb{H}_{i-1})_{K_i} = \mathbb{H}_{K_i}.$$

La dernière égalité vient de la remarque vue dans la définition de \mathbb{H}_E . Montrons que I_{K_i}/\mathbb{H}_i est d'exposant n pour chaque i . C'est vrai par hypothèse si $i = 1$. Supposons donc par récurrence que c'est vrai pour $i \geq 1$. Soit $H_i(\mathfrak{m}) \in \mathbb{H}_i$ le sous-groupe de congruence correspondant au K_i -module \mathfrak{m} . Supposons que le conducteur de \mathbb{H}_{i+1} divise $\tilde{\mathfrak{m}}$. Alors on a $H_{i+1}(\tilde{\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{a} \in I_{K_{i+1}}(\tilde{\mathfrak{m}}) \mid N_{K_{i+1}/K_i}(\mathfrak{a}) \in H_i(\mathfrak{m})\} \in \mathbb{H}_{i+1}$. Soit $\mathfrak{a} \in I_{K_{i+1}}(\tilde{\mathfrak{m}})$. Alors, $N_{K_{i+1}/K_i}(\mathfrak{a}^n) = (N_{K_{i+1}/K_i}(\mathfrak{a}))^n \in I_{K_i}(\mathfrak{m})^n \stackrel{\text{h.r.}}{\subset} H_i(\mathfrak{m})$. Donc, $\mathfrak{a}^n \in H_{i+1}(\tilde{\mathfrak{m}})$.

Cela prouve que n est un exposant de $I_{K_{i+1}}/\mathbb{H}_{i+1} \simeq I_{K_{i+1}}(\tilde{\mathfrak{m}})/H_{i+1}(\tilde{\mathfrak{m}})$. Ainsi, n est un exposant de I_E/\mathbb{H}_E . Nous sommes donc bien dans l'hypothèse du résultat accepté. Donc, en cascade, chaque \mathbb{H}_i (et en particulier \mathbb{H}) admet un corps de classe, en vertu du Théorème (8.15). ≠

Chapitre 9 :

Quelques résultats sur la théorie des n -extensions de Kummer, et calcul d'un nouvel indice

Interrompons un instant le propos pour donner quelques résultats que nous utiliserons par la suite comme lemmes.

Définition (9.1)

Une extension L/K de corps est dite n -extension de Kummer si K contient une racine primitive n -ième de l'unité, si L/K est abélienne et si n est un exposant de $\text{Gal}(L/K)$. Il est évident que si K contient une racine primitive n -ième de l'unité, elle contient toutes les autres racines n -ième de l'unité (d'une même clôture algébrique de K).

Théorème (9.2)

Si L/K est une n -extension de Kummer de degré fini et $M = M(L/K) = \{\alpha \in L^* \mid \alpha^n \in K^*\}$, alors M^n est un sous-groupe de K^* contenant K^{*n} , M^n/K^{*n} est fini et $L = K(\{\sqrt[n]{x} \mid x \in M^n\})$. De plus, l'application $L/K \mapsto M(L/K)^n$ est une bijection de l'ensemble des n -extensions de Kummer finies de K et l'ensemble des sous-groupes W de K^* tels que $W \supset K^{*n}$ et W/K^{*n} est fini. En outre, on a

$$W/K^{*n} \stackrel{\text{canonique}}{\simeq} \widehat{\text{Gal}(L/K)} \stackrel{\text{non canonique}}{\simeq} \text{Gal}(L/K),$$

où $\widehat{\text{Gal}(L/K)}$ est le groupe de caractère de $\text{Gal}(L/K)$.

Preuve

Soit donc L/K une n -extension de Kummer et $M = \{\alpha \in L^* \mid \alpha^n \in K^*\}$. Il est clair que M est un sous-groupe de L^* contenant K^{*n} . Posons $G = \text{Gal}(L/K)$ et μ_n le groupe de racines n -ième de l'unité. Pour chaque $\alpha \in M$, on définit

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) : G &\longrightarrow \mu_n \\ \sigma &\longmapsto \psi(\alpha)(\sigma) := \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}. \end{aligned}$$

C'est une application bien définie, puisque $\alpha \in M : \left(\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\right)^n = \frac{\sigma(\alpha^n)}{\alpha^n} = \frac{\alpha^n}{\alpha^n} = 1$. On vérifie facilement que $\psi(\alpha)$ est un homomorphisme (un caractère de G) pour tout α . En effet,

$$\psi(\alpha)(\sigma\tau) = \frac{\sigma(\tau(\alpha))}{\alpha} = \frac{\sigma(\tau(\alpha))}{\tau(\alpha)} \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha} \stackrel{(*)}{=} \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} \cdot \frac{\tau(\alpha)}{\alpha} = \psi(\alpha)(\sigma) \cdot \psi(\alpha)(\tau).$$

L'égalité $(*)$ vient du fait que $\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}$ est une racine n -ième de l'unité donc appartient à K et donc, pour tout $\tau \in G$, $\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} = \tau\left(\frac{\sigma(\alpha)}{\alpha}\right) = \frac{\tau(\sigma(\alpha))}{\tau(\alpha)} = \frac{\sigma(\tau(\alpha))}{\tau(\alpha)}$. Et on voit donc facilement que $\psi : M \rightarrow \widehat{G}$ est un homomorphisme de groupe. Voyons son noyau : $\alpha \in \ker(\psi) \iff \frac{\sigma(\alpha)}{\alpha} = 1$ pour tout $\sigma \in G \iff \alpha \in K^*$. Ainsi, ψ induit un homomorphisme injectif

$$\overline{\psi} : M/K^* \longrightarrow \widehat{G}$$

qui est parfois appelé “Kummer pairing”. L’élévation à la puissance n et le passage au quotient induisent une application surjective $M \twoheadrightarrow M^n \twoheadrightarrow M^n/K^{*n}$. L’élément $x \in M$ est dans le noyau si et seulement s’il existe $y \in K^*$ tel que $x^n = y^n$. Cela veut dire que $\frac{x}{y} := z$ est une racine n -ième de l’unité, donc $z \in K^*$, ce qui veut dire que $x = z \cdot y \in K^*$ et donc que $M/K^* \simeq M^n/K^{*n}$. Montrons que ψ (donc $\overline{\psi}$) est surjectif : soit χ un caractère de $\widehat{G}/\text{im}(\psi)$. On peut voir χ comme un caractère de \widehat{G} trivial sur $\text{im}(\psi)$. Dans tout ouvrage traitant des caractères [cf. Fr.-Tay., (A9). p. 331], on peut voir que les caractères de \widehat{G} sont les évaluations de G , i.e. il existe $\sigma \in G$ tel que $\chi(\omega) = \omega(\sigma)$, pour tout $\omega \in \widehat{G}$. Dans notre cas, ce σ a donc la propriété que $\omega(\sigma) = 1$ pour tout $\omega \in \text{im}(\psi)$. C’est-à-dire $\psi(\alpha)(\sigma) = 1$ pour tout $\alpha \in M$; ou encore $\sigma(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in M$. Pour conclure que $\sigma = 1$ (donc que $\chi = 1$ et donc que $\widehat{G} = \text{im}(\psi)$), il suffit de montrer que M engendre L sur K . Le groupe G étant abélien, l’extension L/K est une composition de sous-extensions cycliques $L_1/K, \dots, L_k/K$ (voir le début de la démonstration de la réciprocity d’Artin pour plus de détail (Théorème (7.14))) et il suffit donc de montrer que pour tout $i = 1, \dots, k$, M contient un générateur de L_i/K . On va le faire pour L_1 (les autres cas seront identiques). Soit $d = [L_1 : K]$. On a $d|n$; soit ζ une racine primitive d -ième de l’unité (par hypothèse, $\zeta \in K$). Soit $C = \text{Gal}(L_1/K)$ et σ_1 un générateur de C . Puisque, $\zeta \in K$, $N_{L_1/K}(\zeta) = \zeta^d = 1$, par le Théorème de Hilbert 90 (cf. [La1, Thm. 6.6.1, p. 298]), il existe $\alpha \in L_1$ tel que $\sigma_1(\alpha) = \zeta \cdot \alpha$. En élevant à la puissance d , on obtient $\sigma_1(\alpha^d) = \alpha^d$, c’est-à-dire que $a := \alpha^d \in K$. A fortiori, $\alpha^n \in K$, ce qui veut dire que $\alpha \in M$. Considérons le polynôme $X^d - a$. On veut montrer que ce polynôme est irréductible dans $K[X]$. Dans $L_1[X]$, on a $X^d - a = \prod_{i=0}^{d-1} (X - \zeta^i \alpha)$. Supposons que $X^d - a$ soit divisible par un polynôme $f \in K[X]$, unitaire de degré l , avec $0 < l < d$. Alors le coefficient constant de ce polynôme doit être de la forme $\pm \varepsilon \cdot \alpha^l$, où ε est une racine d -ième de l’unité; ce qui implique (puisque les racines d -ième de l’unité sont dans K) que $\alpha^l \in K$, cela est impossible puisque $\sigma_1(\alpha^l) = \zeta^l \cdot \alpha^l$ et $\zeta^l \neq 1$. On a donc montré que $X^d - a$ est irréductible dans $K[X]$, ce qui montre que α engendre L_1 sur K . En définitive, on a montré que

$$M^n/K^{*n} \simeq M/K^* \xrightarrow{\overline{\psi}} \widehat{G} \simeq G \quad (*)$$

donc que M^n/K^{*n} est fini. On a aussi montré que

$$L = K(\{x \mid x \in M\}) = K(\{\sqrt[n]{x} \mid x \in M^n\}),$$

la dernière égalité venant évidemment du fait que les racines de l’unité sont dans K .

Enfin, soit W un sous-groupe de K^* contenant K^{*n} tel que W/K^{*n} soit fini. Posons $L = K(\{\sqrt[n]{x} \mid x \in W\})$. La finitude de W/K^{*n} fait que $L = K(\sqrt[n]{\alpha_1}, \dots, \sqrt[n]{\alpha_m})$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ engendrent W modulo K^{*n} (on utilise toujours que μ_n , l’ensemble des racines n -ième de l’unité, est dans K). Donc, L/K est une extension finie. Clairement, L/K est galoisienne, car les conjugués des racines n -ième des α_i sont dans L . Si $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$, on a, pour tout i , $\sigma(\sqrt[n]{\alpha_i}) = \omega_{i,\sigma} \cdot \sqrt[n]{\alpha_i}$, avec $\omega_{i,\sigma} \in \mu_n \subset K$. Grâce à cela, on montre que très facilement que $\text{Gal}(L/K)$ est abélien et admet n comme exposant. En bref, L/K est une n -extension de Kummer.

Pour achever la preuve, il suffit de montrer que $W = M^n$, où $M = M(L/K)$. Trivialement, $W \subset M^n$. On sait déjà, grâce à (*) que $[M^n : K^{*n}] = [L : K]$, il suffit donc de montrer que $[L : K] \leq [W : K^{*n}]$. Supposons que l’ordre de α_i modulo K^{*n} est d_i et que les α_i correspondent à une présentation de W/K^{*n} comme produit de groupes cycliques :

$$W/K^{*n} \simeq \langle \alpha_1 \bmod K^{*n} \rangle \times \dots \times \langle \alpha_m \bmod K^{*n} \rangle .$$

Alors, $[W : K^{*n}] = d_1 \cdots d_m$. Par définition de d_i , on a $\alpha_i^{d_i} = \beta_i^n$, avec $\beta_i \in K^*$, donc on peut supposer (quitte à remplacer β_i par β_i fois une racine n -ième de l'unité) que $(\sqrt[n]{\alpha_i})^{d_i} = \beta_i$. Ainsi $\sqrt[n]{\alpha_i}$ est une racine de $X^{d_i} - \beta_i$ et donc le degré de $\sqrt[n]{\alpha_i}$ sur K est $\leq d_i$. Enfin, on a

$$\begin{aligned} [L : K] &= [K(\sqrt[n]{\alpha_1}, \dots, \sqrt[n]{\alpha_m}) : K(\sqrt[n]{\alpha_1}, \dots, \sqrt[n]{\alpha_{m-1}})] \cdot [K(\sqrt[n]{\alpha_1}, \dots, \sqrt[n]{\alpha_{m-1}}) : K(\sqrt[n]{\alpha_1}, \dots, \sqrt[n]{\alpha_{m-2}})] \\ &\quad \cdots [K(\sqrt[n]{\alpha_1}) : K] \leq [K(\sqrt[n]{\alpha_m}) : K] \cdots [K(\sqrt[n]{\alpha_1}) : K] \leq d_m \cdots d_1 = [W : K^{*n}] \end{aligned},$$

ce qui montre le théorème. #

Passons maintenant à un tout autre résultat qui généralise quelque peu le théorème des unités de Dirichlet.

Définition (9.3)

Soit S un ensemble de places d'un corps de nombre K . On définit

$$K^{*S} = \{a \in K^* \mid v_{\mathfrak{p}}(aO_K) \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{p} \in S\}.$$

Il va sans dire que si on ajoute ou enlève une place infinie à S , on ne change pas l'ensemble K^{*S} . On supposera donc que S contienne toutes les places infinies (ainsi, l'énoncé du théorème suivant sera plus élégant). On pose

$$I_K[S] \text{ le sous-groupe de } I_K \text{ engendré par les idéaux premiers } \mathfrak{p} \in S.$$

Théorème (9.4) (Théorème de Dirichlet-Chevalley-Hasse)

*Soit K un corps de nombres et S un ensemble fini de places de K . On suppose que S contienne toutes les places infinies. Alors K^{*S} est le produit direct d'un groupe cyclique fini (le groupe des racines de l'unité de K) et d'un groupe abélien libre de rang $|S| - 1$. On remarque que si S est l'ensemble des places infinies, alors $K^{*S} = U_K$ et qu'on retrouve le théorème classique des unités de Dirichlet*

Preuve

Posons S_0 l'ensemble des places finies de S . On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow U_K \longrightarrow K^{*S} \xrightarrow{\iota} I_K[S_0]$$

où l'application ι est définie par $\iota(a) = a \cdot O_K$. Soit $h = h_K = |I_K/P_K|$. Il est clair que $I_K[S_0]^h \subset \iota(K^{*S}) \subset I_K[S_0]$ (cf. [Sam, §4.2, Théorème 2, p. 71]). Ainsi, $\iota(K^{*S})$ est un groupe abélien libre de même rang que $I_K[S_0]$ qui est $|S_0|$. Puisque la suite exacte ci-dessus est formée de groupes abéliens, elle est scindée, donc $K^{*S} \simeq \iota(K^{*S}) \times U_K$. Or, le théorème classique de Dirichlet sur les unités (cf. [Sam, Théorème 1, §4.4, p. 72]) nous apprend que U_K est le produit direct du groupe des racines de l'unités de K et d'un groupe abélien libre de rang $|S \setminus S_0| - 1$. Cela prouve le théorème. #

Corollaire (9.5)

Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, supposons de plus que K contienne une racine primitive n -ième de l'unité. Alors on a

$$[K^{*S} : (K^{*S})^n] = n^{|S|}.$$

Preuve

Le théorème précédent nous montre que $K^{*S} \simeq \langle g \rangle \times \mathbb{Z}^{|S|-1}$, où g est une racine de l'unité. Par hypothèse, g est d'ordre un multiple de n . Alors $(K^{*S})^n \simeq \langle g^n \rangle \times (n\mathbb{Z})^{|S|-1}$. D'où, par propriété de g ,

$$K^{*S} / (K^{*S})^n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{|S|-1} = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{|S|}.$$

#

Un nouveau calcul d'indice

Définition (9.6)

Supposons que K contienne une racine primitive n -ième de l'unité et soit \mathfrak{m} un K -module. On pose

$$c(\mathfrak{m}) = [K^* : K^{*n} K_{\mathfrak{m}}^*].$$

Théorème (9.7)

Soit K un corps de nombres contenant une racine primitive n -ième de l'unité

a) Si \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 sont des K -modules premiers entre eux, alors,

$$c(\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2) = c(\mathfrak{m}_1) \cdot c(\mathfrak{m}_2).$$

Il suffit donc de calculer $c(\mathfrak{m})$ lorsque $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^t$ où \mathfrak{p} est une place finie ou infinie de K .

b) Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ est une place infinie réelle, alors

$$c(\mathfrak{m}) = 2.$$

c) Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^t$ où $t \in \mathbb{N}$ et \mathfrak{p} est un idéal premier de K , alors, si t est assez grand, on a :

$$c(\mathfrak{m}) = n^2 \cdot [O_{\mathfrak{p}} : n \cdot O_{\mathfrak{p}}] = [O_{(\mathfrak{p})} : n \cdot O_{(\mathfrak{p})}],$$

où $O_{\mathfrak{p}}$ est le complété localisé de O_K en \mathfrak{p} et $O_{(\mathfrak{p})}$ est le localisé de O_K en \mathfrak{p} .

Preuve

Le théorème d'approximation débile (Théorème (0.3)) nous dit que $K^* / K_{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2}^* \simeq K^* / K_{\mathfrak{m}_1}^* \times K^* / K_{\mathfrak{m}_2}^*$.

Or, les puissances n -ièmes se correspondent, donc

$$K^{*n} K_{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2}^* / K_{\mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2}^* \simeq K^{*n} K_{\mathfrak{m}_1}^* / K_{\mathfrak{m}_1}^* \times K^{*n} K_{\mathfrak{m}_2}^* / K_{\mathfrak{m}_2}^*.$$

En quotientant, on trouve

$$K^*/(K^{*n}K_{\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2}^*) \simeq K^*/(K^{*n}K_{\mathfrak{m}_1}^*) \times K^*/(K^{*n}K_{\mathfrak{m}_2}^*),$$

ce qui montre la partie a).

- b) Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ est une place infinie réelle, alors $n = 2$ (puisque K contient une racine n -ième de l'unité et possède un plongement réel). Si σ est le plongement associé à \mathfrak{p} , l'homomorphisme surjectif $K^* \rightarrow \{\pm 1\}$, $x \mapsto \text{sgn}(\sigma(x))$ a pour noyau $\{x \in K^* \mid \sigma(x) > 0\} = K_{\mathfrak{m}}^* = K^{*2}K_{\mathfrak{m}}^*$, ce qui montre la partie b).
- c) Supposons que $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}^t$ où $t \in \mathbb{N}$ et \mathfrak{p} est un idéal premier de K . Coupons notre indice en deux :

$$c(\mathfrak{m}) = [K^* : K^{*n}K^*(\mathfrak{m})] \cdot [K^{*n}K^*(\mathfrak{m}) : K^{*n}K_{\mathfrak{m}}^*],$$

où $K^*(\mathfrak{m})$ est le groupe des unités du localisé de O_K en \mathfrak{p} (autrement dit : $K^*(\mathfrak{m}) = U(O_{(\mathfrak{p})})$). Calculons le premier terme : nous savons que $O_{(\mathfrak{p})}$ est un anneau de Dedekind à quotient fini n'ayant qu'un seul idéal premier, c'est donc un anneau de valuation discrète. Il existe donc une *uniformisante* π c'est -à-dire que $\pi O_{(\mathfrak{p})} = \mathfrak{p}O_{(\mathfrak{p})}$ et ainsi, tout élément de K^* s'écrit de manière unique $\pi^k \cdot u$, avec $k \in \mathbb{Z}$ et $u \in K^*(\mathfrak{m})$. On a donc un isomorphisme de groupe $K^* \simeq \mathbb{Z} \times K^*(\mathfrak{m})$. Via cet isomorphisme, on a que $K^{*n} \simeq n\mathbb{Z} \times K^*(\mathfrak{m})^n$ et $K^*(\mathfrak{m}) \simeq \{0\} \times K^*(\mathfrak{m})$. Ce qui donne $K^{*n}K^*(\mathfrak{m}) \simeq n\mathbb{Z} \times K^*(\mathfrak{m})$ et donc $K^*/(K^{*n}K^*(\mathfrak{m})) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ce qui prouve que

$$[K^* : K^{*n}K^*(\mathfrak{m})] = n.$$

Calculons le second terme. La composition d'applications naturelles $K^*(\mathfrak{m}) \rightarrow K^{*n}K^*(\mathfrak{m}) \rightarrow (K^{*n}K^*(\mathfrak{m}))/K^{*n}K_{\mathfrak{m}}^*$ est surjective. Son noyau est $K^*(\mathfrak{m}) \cap K^{*n}K_{\mathfrak{m}}^* = K^*(\mathfrak{m})^n K_{\mathfrak{m}}^*$ (car $K_{\mathfrak{m}}^* \subset K^*(\mathfrak{m})$). Donc,

$$[K^{*n}K^*(\mathfrak{m}) : K^{*n}K_{\mathfrak{m}}^*] = [K^*(\mathfrak{m}) : K^*(\mathfrak{m})^n K_{\mathfrak{m}}^*].$$

Notons $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}O_{(\mathfrak{p})}$. On se souvient que l'homomorphisme surjectif $O_{(\mathfrak{p})} \rightarrow O_{(\mathfrak{p})}/\tilde{\mathfrak{p}}^t$ induit un homomorphisme $O_{K(\mathfrak{p})}^* = K^*(\mathfrak{m}) \rightarrow (O_{(\mathfrak{p})}/\tilde{\mathfrak{p}}^t)^*$ (cf. preuve du Lemme (5.8)). Puisque $O_{(\mathfrak{p})}$ est local, alors $1 + \tilde{\mathfrak{p}}^t \subset K^*(\mathfrak{m})$, donc cet homomorphisme est surjectif et son noyau est $1 + \tilde{\mathfrak{p}}^t = K_{\mathfrak{m}}^*$. On a aussi $(O_{(\mathfrak{p})}/\tilde{\mathfrak{p}}^t)^* \simeq (O_{\mathfrak{p}}/\widehat{\mathfrak{p}}^t)^* = U_{\mathfrak{p}}/(1 + \widehat{\mathfrak{p}}^t) = U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(t)}$, où $U_{\mathfrak{p}} = O_{\mathfrak{p}}^*$, $U_{\mathfrak{p}}^{(t)} = 1 + \widehat{\mathfrak{p}}^t$ et l'avant dernière égalité vient aussi du fait que $O_{\mathfrak{p}}$ est local. Ainsi $K^*(\mathfrak{m})/K_{\mathfrak{m}}^* \simeq U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(t)}$. On a montré au passage que $K^*(\mathfrak{m})/K_{\mathfrak{m}}^*$ était fini. Comme avant, passant au quotient par les puissances n -ièmes, on obtient :

$$K^*(\mathfrak{m})/(K^*(\mathfrak{m})^n \cdot K_{\mathfrak{m}}^*) \simeq U_{\mathfrak{p}}/(U_{\mathfrak{p}}^n \cdot U_{\mathfrak{p}}^{(t)}).$$

Or, si t est assez grand, on a prouvé à la Proposition (5.11) que $U_{\mathfrak{p}}^{(t)} \subset U_{\mathfrak{p}}^n$. Ainsi, si t est assez grand, on a

$$c(\mathfrak{m}) = n \cdot [U_{\mathfrak{p}} : U_{\mathfrak{p}}^n]. \quad (*)$$

Il nous reste donc à calculer l'indice $[U_{\mathfrak{p}} : U_{\mathfrak{p}}^n]$. Pour cela, nous allons utiliser la q -machine (q pour "quotient de Herbrand") : considérons G un groupe cyclique d'ordre n . Tous les G -modules M considérés seront considérés comme triviaux ($\sigma \cdot x = x$ pour tout $x \in M$ et $\sigma \in G$). Soit donc M un tel module, noté multiplicativement. Dans ce cas, $H^0(M) = \ker \Delta / \text{Im} N = M/M^n$ et $H^1(M) = \{x \in M \mid x^n = 1\} / \{1\}$.

Ainsi, $|H^0(U_{\mathfrak{p}})| = [U_{\mathfrak{p}} : U_{\mathfrak{p}}^n]$ et $|H^1(U_P)| = n$, car par hypothèse K contient les racines n -ième de 1. Cela implique alors grâce à (*) que

$$c(\mathfrak{m}) = \frac{n^2}{q(U_{\mathfrak{p}})}. \quad (**)$$

Puisque, pour tout s entier, on a $U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(s)} \simeq U(O_{\mathfrak{p}}/\widehat{\mathfrak{p}}^s)$, on a $[U_{\mathfrak{p}} : U_{\mathfrak{p}}^{(s)}] < \infty$ ainsi, en vertu du Corollaire (4.7), on a $q(U_{\mathfrak{p}}) = q(U_{\mathfrak{p}}^{(s)})$. Le Corollaire (5.10) nous montre que si s est assez grand, alors l'application \log est un isomorphisme de $U_{\mathfrak{p}}^{(s)}$ sur $\widehat{\mathfrak{p}}^s$. Et puisque $[O_{\mathfrak{p}} : \widehat{\mathfrak{p}}^s] < \infty$, le Corollaire (4.7) nous montre que

$$q(U_{\mathfrak{p}}) = q(\widehat{\mathfrak{p}}^s) = q(O_{\mathfrak{p}}),$$

où la structure de $\widehat{\mathfrak{p}}^s$ et de $O_{\mathfrak{p}}$ est maintenant additive, mais toujours triviale. On peut calculer $q(O_{\mathfrak{p}})$ directement : $H^0(O_{\mathfrak{p}}) = O_{\mathfrak{p}}/nO_{\mathfrak{p}}$ et $H^1(O_{\mathfrak{p}}) = \{0\}$. Ainsi, $q(O_{\mathfrak{p}}) = \frac{1}{[O_{\mathfrak{p}} : nO_{\mathfrak{p}}]}$. Finalement, la relation (**) nous donne

$$c(\mathfrak{m}) = n^2 \cdot [O_{\mathfrak{p}} : nO_{\mathfrak{p}}] = n^2 \cdot [O_{(\mathfrak{p})} : nO_{(\mathfrak{p})}]$$

la dernière égalité venant du fait que $O_{\mathfrak{p}}/nO_{\mathfrak{p}} \simeq O_{(\mathfrak{p})}/nO_{(\mathfrak{p})}$ [cf. Fr-Tay Th. 11 + Cor, p.77]. ≠

Interlude

Nous allons prouver en passant un résultat bien connu. Il s'agit de la réciprocité quadratique. Ceci explique pourquoi on appelle le Théorème (7.14) le Théorème de *réciprocité* d'Artin. Evidemment, ce n'est pas la preuve la plus directe de ce résultat...

Définition (9.8)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et K un corps de nombres contenant une racine primitive n -ième de l'unité ζ_n . Soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$ premier à n , et $\alpha \in O_K \setminus \mathfrak{p}$. Il est clair que $\alpha^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Donc l'image de α dans $\mathbb{F} := O_K/\mathfrak{p}$ notée $\overline{\alpha}$ est telle que $\overline{\alpha}^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})-1} = 1$. Ainsi, $\overline{\alpha}^{\frac{\mathbb{N}(\mathfrak{p})-1}{n}}$ est une racine n -ième de l'unité dans \mathbb{F} . Par le Lemme (0.13), il existe une unique racine n -ième de l'unité dans K , notée $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n$ telle que

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n \equiv \alpha^{\frac{\mathbb{N}(\mathfrak{p})-1}{n}} \pmod{\mathfrak{p}}.$$

On étend cette application (appelée *symbole de puissance n -ième résiduelle*) multiplicativement au niveau des dénominateurs. Cela donne un homomorphisme de groupe

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\cdot}\right)_n : I_K(\mathfrak{m}) &\longrightarrow \mu_n \\ \mathfrak{a} &\longmapsto \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)_n \end{aligned}$$

en posant μ_n l'ensemble des racines n -ième de l'unité de \mathbb{C} et en supposant que \mathfrak{m} est n'importe quel K -module divisible par des idéaux premiers qui ne contiennent pas $n \cdot \alpha$.

Lemme (9.9)

Sous les mêmes hypothèses que la définition précédente, on a

$$a) \quad \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n \text{ si } \alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{p}}.$$

- b) $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n \equiv \alpha^{\frac{N(\mathfrak{p})-1}{n}} \pmod{\mathfrak{p}}$ pour tout $\alpha \in O_K$.
- c) $\left(\frac{\alpha\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n \cdot \left(\frac{\beta}{\mathfrak{p}}\right)_n$.
- d) $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$ si et seulement si il existe $\beta \in O_K \setminus \mathfrak{p}$ tel que $\alpha \equiv \beta^n \pmod{\mathfrak{p}}$.
- e) Si $n = 2$, $\zeta_2 = -1$ et $K = \mathbb{Q}$, on retrouve le symbole de Legendre : soit $q \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$ et $a \in \mathbb{Z}$ avec $(a, q) = 1$, $\left(\frac{a}{q}\right) = 1$ si l'équation $x^2 \equiv a \pmod{q}$ est résoluble et -1 sinon.
- f) l'application $a \mapsto \left(\frac{a}{q}\right)$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z})^* = \mathbb{F}_p^*$ sur $\{\pm 1\}$.

Preuve

Les parties a), b) et c) découlent de la définition. Pour la partie d), posons $q = N(\mathfrak{p})$. S'il existe $\beta \in O_K \setminus \mathfrak{p}$ tel que $\alpha \equiv \beta^n \pmod{\mathfrak{p}}$, alors $\alpha^{\frac{q-1}{n}} \equiv (\beta^n)^{\frac{q-1}{n}} = \beta^{q-1} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Réciproquement, si $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$, alors $\alpha^{\frac{q-1}{n}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. On se souvient que \mathbb{F}^* est un groupe cyclique engendré par un élément disons $\overline{\gamma}$. Donc $\alpha \equiv \gamma^s \pmod{\mathfrak{p}}$ pour un certain $1 \leq s \leq q-1$. Ainsi $\alpha^{\frac{q-1}{n}} \equiv \gamma^{s \cdot \frac{q-1}{n}} \equiv 1 \pmod{\mathfrak{p}}$. Ainsi, l'ordre de γ qui est $q-1$ divise $s \cdot \frac{q-1}{n}$, c'est à dire que n divise s , disons, $s = kn$. Finalement, $\alpha \equiv (\gamma^k)^n = \beta^n \pmod{\mathfrak{p}}$ en posant $\beta = \gamma^k$. La partie e) est un corollaire immédiat de la partie d). La partie f) suit de la partie c) et du fait que l'application de $x \mapsto x^2$ est un endomorphisme de \mathbb{F}_p^* de noyau ± 1 ; donc cet endomorphisme n'est pas injectif donc pas surjectif. \neq

Théorème (9.10)

Soit K un corps de nombres contenant une racine primitive n -ième de l'unité, $\alpha \in O_K$, \mathfrak{m} un K -module divisible par $n \cdot \alpha O_K$. Notons $L = K(\sqrt[n]{\alpha})$. Puisque K contient les racines n -ième de l'unité, il est évident que L/K est une extension galoisienne, c'est même une n -extension de Kummer, donc on se souvient de l'homomorphisme injectif $\psi(\sqrt[n]{\alpha}) : \text{Gal}(L/K) \rightarrow \mu_n$ vu lors de la preuve du Théorème (9.2). Alors, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} I_K(\mathfrak{m}) & \xrightarrow{\Phi_{L/K}} & \text{Gal}(L/K) \\ \downarrow \left(\frac{\alpha}{\cdot}\right)_n & \searrow \psi(\sqrt[n]{\alpha}) & \\ \mu_n & & \end{array}$$

Preuve

Remarquons tout d'abord que les idéaux premiers de K qui ramifient dans L divisent $n \cdot \alpha$. En effet, supposons que $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$ ramifie dans L . Cela veut dire que \mathfrak{p} divise le discriminant de L/K (cf. [Sam, Thm.1, Chap. 5, p.88]). Or, puisque α est entier, le discriminant de L/K divise le discriminant de $O_K[\sqrt[n]{\alpha}]/O_K$ qui lui-même divise le discriminant de $f := X^n - \alpha$ (cf. [Sam, prop. 1, Chap. 2, p.46] et la définition du discriminant d'un polynôme [Fr-Tay, rel. 1.5 et 1.9, pp.10-11]). Et finalement, si $f = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ avec $\alpha_1 = \sqrt[n]{\alpha}$, on a

$$\pm \text{Disc}(f) = \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) = \prod_{i=1}^n f'(\alpha_i) = n^n \cdot \prod_{i=1}^n \alpha_i^{n-1} = n^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot (\text{rac. de l'unité}).$$

Donc, l'application $\Phi_{L/K}$ est bien définie. Soit $\mathfrak{p} \in I_K(\mathfrak{m})$. Pour prouver le théorème, il suffit de prouver

que

$$\text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p})(\sqrt[n]{\alpha}) = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n \cdot \sqrt[n]{\alpha}. \quad (*)$$

D'une part, on a $\text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p})(\sqrt[n]{\alpha}) = \omega \cdot \sqrt[n]{\alpha}$, avec $\omega \in \mu_n$. D'autre part, par définition de l'automorphisme de Frobenius, $\text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p}) \equiv (\sqrt[n]{\alpha})^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} \pmod{\mathfrak{p} \cdot O_L}$. Mais $(\sqrt[n]{\alpha})^{\mathbb{N}(\mathfrak{p})} = \alpha^{\frac{\mathbb{N}(\mathfrak{p})-1}{n}} \cdot \sqrt[n]{\alpha} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n \cdot \sqrt[n]{\alpha} \pmod{\mathfrak{p} \cdot O_L}$. Donc $\omega \cdot \sqrt[n]{\alpha} \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n \cdot \sqrt[n]{\alpha} \pmod{\mathfrak{p} \cdot O_L}$. Or, $\sqrt[n]{\alpha}$ est premier à $\mathfrak{p} \cdot O_L$ par hypothèse, donc $\omega \equiv \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n \pmod{\mathfrak{p} \cdot O_L}$ et finalement, $\omega = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n$ en vertu du Lemme (0.13). \neq

Corollaire (9.11)

Sous les mêmes hypothèses, on suppose de plus que \mathfrak{m} est admissible pour L/K (c'est possible, en vertu du théorème de réciprocité d'Artin (Théorème (7.14))) et on note \overline{G} l'image de $\text{Gal}(L/K)$ par $\psi(\sqrt[n]{\alpha})$. Alors $\left(\frac{\alpha}{\cdot}\right)_n$ induit un homomorphisme surjectif $I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} \rightarrow \overline{G}$, qu'on notera encore $\left(\frac{\alpha}{\cdot}\right)_n$.

Preuve

Puisque \mathfrak{m} est admissible pour L/K , $P_{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K})$, donc en vertu du théorème précédent, $P_{\mathfrak{m}} \subset \ker\left(\left(\frac{\alpha}{\cdot}\right)_n\right)$, et on conclut en se souvenant que $\Phi_{L/K}$ est surjective (cf. Théorème (2.16)). \neq

Corollaire (9.12)(réciprocité quadratique)

Si p et q sont des nombres premiers impairs, alors on a

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

preuve

Le Théorème (0.14) nous apprend que $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ est le corps de la classe d'équivalence du groupe de congruence P_n , où n est le \mathbb{Q} -module $(p) \cdot \infty$, où ∞ est l'unique place infinie de \mathbb{Q} . Or, on sait que $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$ est une extension cyclique d'ordre $p-1$ pair. Par la théorie de Galois, $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ contient une unique extension quadratique de \mathbb{Q} . Dans cette extension, p est le seul nombre premier qui ramifie (car c'est le seul qui ramifie dans $\mathbb{Q}(\zeta_p)$). Or, on sait que le discriminant de $\mathbb{Q}(\sqrt{m}) = \begin{cases} 4m & \text{si } m \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ m & \text{si } m \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$ (cf. [Sam, exemple, p. 89]) et qu'un nombre premier ramifie si et seulement s'il divise ce discriminant (cf. [Sam, Thm. 1, p. 88]). Ainsi, puisque 2 ne ramifie pas, ce discriminant vaut $\pm p \equiv 1 \pmod{4}$. Donc ce sous-corps est $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$, où $p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot p$.

On a vu lors de la remarque qui suit le Lemme (7.3) que $(p) \cdot \infty$ était admissible pour l'extension $\mathbb{Q}(\zeta_p)/\mathbb{Q}$. Donc, par le Lemme (7.4), $(p) \cdot \infty$ est aussi admissible pour $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})/\mathbb{Q}$, et donc, par le Lemme (7.3), $(2p) \cdot \infty =: \mathfrak{m}$ est admissible pour $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})/\mathbb{Q}$. On peut donc appliquer le corollaire précédent avec $K = \mathbb{Q}$, $n = 2$ et $\alpha = p^*$. Dans ce cas, l'application $\psi := \psi(\sqrt{p^*}) : \text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})/\mathbb{Q}) \rightarrow \mu_2 = \{\pm 1\}$ est un isomorphisme, car si $\sigma \neq \text{Id}$, on a $\sigma(\sqrt{p^*}) = \psi(\sigma) \cdot \sqrt{p^*} = (-1) \cdot \sqrt{p^*}$. Donc, $\overline{G} = \mu_2$. On a donc par le corollaire précédent un homomorphisme surjectif $\left(\frac{p^*}{\cdot}\right)_2 : I_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} \rightarrow \mu_2$. Or, on a montré que $I_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} \simeq (\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z})^* \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ (cf. Théorème (0.14)). D'où un homomorphisme surjectif $\varphi : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \rightarrow \mu_2$. Soit q un premier impair différent de p . Suivons à la trace l'image de $q \bmod p$ par φ . On a $q \bmod p \mapsto q \bmod 2p \mapsto q\mathbb{Z} \bmod P_{\mathfrak{m}} \mapsto \left(\frac{p^*}{q\mathbb{Z}}\right)_2 \stackrel{\text{Lemme (9.9)}}{=} \left(\frac{p^*}{q}\right)$. En bref, $\varphi(q \bmod p) = \left(\frac{p^*}{q}\right)$. D'autre part, la partie f) du Lemme (9.9) montre que $\left(\frac{\cdot}{p}\right) : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \rightarrow \mu_2$ est aussi un homomorphisme surjectif. Le noyau de cette application est un sous-groupe d'indice 2 de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ qui est cyclique (cf.

[Jac1, Theorem 2.8, p.132]). Or, il n'y a qu'un sous-groupe d'indice donné dans un groupe cyclique. Cela montre que $\left(\frac{\cdot}{p}\right)$ et φ ont le même noyau. Puisque leur image est μ_2 , c'est forcément les mêmes applications. Cela montre que $\left(\frac{p^*}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$. De cela et des parties b) et c) du Lemme (9.9), on tire finalement

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{p^*}{q}\right) = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}.$$

///

Les esprits chagrins rétorqueront que c'est la preuve la plus compliquée de ce fameux théorème et qu'on ne montre même pas que $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Et ils auraient raisons ! Mais au moins, on comprend le lien entre réciprocity d'Artin et réciprocity quadratique. Nous ne faisons donc ici qu'expliquer un mot.

Chapitre 10

Le théorème principal du corps de classe

Rappelons l'énoncé de ce théorème, que nous avons déjà énoncé au Chapitre 8 (Théorème (8.10)) :

Théorème (10.1) (Théorème d'existence du corps de classe)

Soit K un corps de nombres. Alors pour toute classe \mathbb{H} d'équivalence de sous-groupes de congruence de K , il existe une extension abélienne L/K telle que $\mathbb{H} = \mathbb{H}(L/K)$. On dit alors que L/K est le corps de classe de \mathbb{H} (on devrait plutôt dire le corps de la classe \mathbb{H}).

Rappelons encore exactement de quoi il s'agit : un sous-groupe H de I_K est dit “de congruence” s'il existe un K -module \mathfrak{m} tel que $P_m \subset H \subset I_K(\mathfrak{m})$. Deux groupes de congruences H_1 et H_2 sont dit équivalents s'il existe un K -modules \mathfrak{m}'' tel que $H_1 \cap I_K(\mathfrak{m}'') = H_2 \cap I_K(\mathfrak{m}'')$. On a montré au Corollaire-Définitions (8.5) que si \mathbb{H} est une classe d'équivalence alors il existe un K -module \mathfrak{f} tel que $\mathbb{H} = \{H(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{f}|\mathfrak{m}\}$, avec $H(\mathfrak{m}) = H(\mathfrak{f}) \cap I_K(\mathfrak{m})$, et que tous les groupes $I_K(\mathfrak{m})/H(\mathfrak{m})$ avec $\mathfrak{f}|\mathfrak{m}$ sont isomorphe, on note ce groupe I_K/\mathbb{H} (cf. Définition (8.11)) . D'autre part, si L/K est une extension abélienne de K de degré fini, alors les noyaux des applications d'Artin $\Phi_{L/K} : I_K(\mathfrak{m}) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ forment sont équivalents et la classe de telle groupe ce note $\mathbb{H}(L/K)$. Puisque l'application d'Artin est surjective (cf. Théorème (2.16)), dans ce cas, on a donc $I_K/\mathbb{H}(L/K) \simeq \text{Gal}(L/K)$. Au Chapitre 8 (Proposition (8.9)) on a montré que l'application

$$L/K \longmapsto \mathbb{H}(L/K)$$

était une application injective de l'ensemble des extensions abéliennes finies de K (incluses dans \mathbb{C}) dans l'ensemble des classes d'équivalences de sous-groupes de congruence pour K . Le Théorème (10.1) dit simplement que cette application est surjective.

Rappelons aussi qu'en vertu du Théorème (8.16) qu'il suffit de prouver ce résultat dans le cas où K possède une racine primitive n -ième de l'unité et que n est un exposant du groupe I_K/\mathbb{H} .

Mais avant cela, il va falloir démontrer un gros théorème (dû vraisemblablement à Herbrand) qui aura comme corollaire immédiat ce qu'on recherche. Donnons donc le cadre de ce théorème qui est, il faut bien l'avouer, un peu surprenant :

On suppose que K possède une racine primitive n -ième de l'unité. On pose S_1 et S_2 deux ensembles finis de places telles que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ et $S = S_1 \cup S_2$ remplit les trois conditions suivantes :

- i) S contient toutes les places infinies.
- ii) S contient toutes les places finies \mathfrak{p} telles que $\mathfrak{p} \mid n \cdot O_K$
- iii) S contient toutes les places finies \mathfrak{p} telles que $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_k$, où $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_k$ est un système fixé de représentants de toutes les classes de I_K modulo P_K

Soit \mathfrak{m}_1 (resp. \mathfrak{m}_2) un K -module tel que l'ensemble de places qui divisent \mathfrak{m}_1 (resp. \mathfrak{m}_2) soit exactement les places non complexes de S_1 (resp. S_2).

On définit deux sous-groupes de congruence

$$H_1 = P_{\mathfrak{m}_1} \cdot (I_K(\mathfrak{m}_1))^n \cdot I_K[S_2] \subset I_K(\mathfrak{m}_1)$$

$$H_2 = P_{\mathfrak{m}_2} \cdot (I_K(\mathfrak{m}_2))^n \cdot I_K[S_1] \subset I_K(\mathfrak{m}_2)$$

Il est clair que H_1 est défini modulo \mathfrak{m}_1 et que H_2 est défini modulo \mathfrak{m}_1 . On définit aussi les sous-groupes de K^* suivants

$$W_1 = K^S \cdot K^{*n} \cap K_{\mathfrak{m}_2}^*$$

$$W_2 = K^S \cdot K^{*n} \cap K_{\mathfrak{m}_1}^*.$$

Le lecteur attentif aura remarqué qu'on a “croisé” les indices ! Et finalement, pour $i = 1, 2$, on pose

$$L_i = K(\sqrt[n]{W_i}).$$

On remarque déjà que les extensions L_i/K sont de degré fini. En effet : on voit facilement que l'image de W_i par l'application $K^* \rightarrow K^*/K^{*n}$ est $W_i K^{*n}/K^{*n}$. Et on a $W_i K^{*n}/K^{*n} \subset K^S K^{*n}/K^{*n} \xrightarrow{\text{thm. d'isom}} K^S/K^S \cap K^{*n} = K^S/(K^S)^n$, qui est un groupe d'ordre $n^{|S|}$ par le théorème Dirichlet-Chevalley-Hasse (cf. Corollaire (9.5)). Ainsi, on voit aisément (en utilisant un même raisonnement qu'au Théorème (9.2)) que les extensions L_i/K sont des n -extensions de Kummer. Par le même Théorème (9.2), on a :

$$\text{Gal}(L_i/K) \simeq W_i K^{*n}/K^{*n} \xrightarrow{\text{thm. d'isom}} W_i/(W_i \cap K^{*n}). \quad (*)$$

Théorème (10.2)

Sous les mêmes hypothèses et en supposant que les idéaux premiers finis qui divisent \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 apparaissent dans \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 à des puissances suffisamment grandes, alors, pour $i = 1, 2$, on a :

$$H_i \in \mathbb{H}(L_i/K) \quad \text{et } \mathfrak{m}_i \text{ est admissible pour } L_i/K.$$

Preuve

- (I) On suppose que pour chaque idéal premier \mathfrak{p} qui divise \mathfrak{m}_1 (resp. \mathfrak{m}_2), la puissance $\mathfrak{p}^t|\mathfrak{m}_1$ (resp. \mathfrak{m}_2) soit assez grande pour que $U_{\mathfrak{p}}^{(t)} \subset U_{\mathfrak{p}}^n$. (cf. Proposition (5.11)). Alors on affirme que toute place de S_1 (resp. S_2) se décompose complètement dans L_2 (resp. L_1). En effet, prouvons-le pour $\mathfrak{p} \in S_1$ (la preuve pour un élément de S_2 est identique). Il suffit de montrer que $[L_{2\mathfrak{p}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}] = 1$ pour tout place \mathfrak{P} au-dessus de \mathfrak{p} , car $[L_{2\mathfrak{p}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}] = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cdot f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ (cf. [Fr-Tay, 1.14, p. 111] pour les places finies et aux Définitions (4.9) pour les places infinies). Supposons que \mathfrak{p} est infinie complexe, alors $L_{2\mathfrak{p}} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{C}$, donc c'est en ordre. Si \mathfrak{p} est infinie réelle, alors $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}$ et $n = 2$ (car K a un plongement réel et une racine n -ième de l'unité, forcément -1). Comme $W_2 \subset K_{\mathfrak{m}_1}^*$ et que $\mathfrak{p}|\mathfrak{m}_1$, on a $W_2 \subset \mathbb{R}_+^*$. Donc, puisque les racines carrées de nombres positifs existent dans \mathbb{R} , on a $L_{2\mathfrak{p}} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt{W_2}) = \mathbb{R}(\sqrt{W_2}) = \mathbb{R}$, donc c'est aussi bon pour ce cas-là. Enfin, si \mathfrak{p} est une place finie et si $\mathfrak{p}^t|\mathfrak{m}_1$, alors $W_2 \subset K_{\mathfrak{m}_1}^* \subset U_{\mathfrak{p}}^{(t)} \subset U_{\mathfrak{p}}^n$ et donc $\sqrt[n]{W_2} \subset \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ et donc $L_{2\mathfrak{p}} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, ce qui règle la partie (I).
- (II) Sous les mêmes hypothèses que (I), alors les places qui ramifient dans L_i sont dans S_i (pour $i = 1, 2$). Montrons-le pour $i = 1$. Soit \mathfrak{p} une place qui ramifie dans L_1 . Il suffit de montrer que $\mathfrak{p} \in S$ (par la

partie (I)). Si \mathfrak{p} est infini, c'est vrai par les propriétés postulées sur S (qui possède toutes les places infinies). On suppose donc \mathfrak{p} finie. Il suffit de montrer que si $\alpha \in K^{*S}$ et si $\mathfrak{p} \notin S$, alors \mathfrak{p} ne ramifie pas dans $K(\sqrt[n]{\alpha})$, car $W_1 \subset K^{*S} \cdot K^{*n}$ et L_1 est un produit de tels extensions et on sait que si un idéal ne ramifie pas dans deux corps, alors il ne ramifie pas dans le produit de ces deux corps (cf. [Mar, Thm. 31, p.107]). De plus, on peut supposer que $\alpha \in O_K \cap K^{*S}$. En effet, l'idéal $\alpha O_K = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, avec \mathfrak{a} et \mathfrak{b} des idéaux entiers uniquement divisibles par des premiers de S . Soit $h = |I_K/P_K|$. Alors on a $\alpha O_K = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{h-1}}{\mathfrak{b}^h} = \frac{\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{h-1}}{\beta O_K}$, avec $\beta \in O_K \cap K^{*S}$. Ainsi, $\alpha = \frac{\gamma}{\beta}$, avec $\gamma \in O_K \cap K^{*S}$. Ainsi, $K(\sqrt[n]{\alpha}) = K(\sqrt[n]{\frac{\gamma}{\beta}}) = K(\sqrt[n]{\beta^{n-1}\gamma})$, car $\sqrt[n]{\beta^n} \in K$ puisque K possède toutes les racines n -ièmes de 1. Pour montrer que \mathfrak{p} ne ramifie pas dans $K(\sqrt[n]{\alpha})$, il suffit de montrer que \mathfrak{p} ne divise pas le discriminant du polynôme $f := X^n - \alpha$. En effet (on a déjà donné ce raisonnement, mais il était dans un interlude, donc pas obligatoire; maintenant il le devient !), il est bien connu que si \mathfrak{p} ne divise pas le discriminant de $K(\sqrt[n]{\alpha})/K$ alors il ne ramifie pas (cf. [Sam, Thm.1, Chap. 5, p.88]). Or, puisque α est entier, le discriminant de $K(\sqrt[n]{\alpha})/K$ divise le discriminant de $O_K[\sqrt[n]{\alpha}]/O_K$ qui lui-même divise le discriminant de f (cf. [Sam, prop. 1, Chap. 2, p.46] et la définition du discriminant d'un polynôme [Fr-Tay, rel. 1.5 et 1.9, pp.10-11]). Et finalement, si $f = \prod_{i=1}^n (X - \alpha_i)$ avec $\alpha_1 = \sqrt[n]{\alpha}$, on a

$$\pm \text{Disc}(f) = \prod_{i \neq j} (\alpha_i - \alpha_j) = \prod_{i=1}^n f'(\alpha_i) = n^n \cdot \prod_{i=1}^n \alpha_i^{n-1} = n^n \cdot \alpha^{n-1} \cdot (\text{rac. de l'unité}).$$

Il est évident que \mathfrak{p} ne divise pas $\alpha \cdot O_K$, car $\alpha \in K^{*S}$ et \mathfrak{p} ne divise pas $n \cdot O_K$, par la relation (ii) définissant S . Cela montre (II).

Si on augmente les exposants des diviseurs premiers de \mathfrak{m}_1 et de \mathfrak{m}_2 , cela a pour effet de remplacer les L_1 et L_2 originaux par des sous-extensions de ces L_i/K . Et comme il n'y a qu'un nombre fini de sous-extensions de ces L_1/K et L_2/K , il arrive une situation où augmenter encore ces exposants ne change plus les corps L_1 et L_2 correspondants (quitte à arriver à K , ça ne fait rien). On supposera dans la suite que les exposants sont assez grands pour remplir cette condition de stabilité, et alors, en augmentant encore les exposants si nécessaire, grâce au théorème de réciprocité d'Artin, on peut supposer que \mathfrak{m}_1 (resp. \mathfrak{m}_2) est admissible pour L_1/K (resp. pour L_2/K). Posons alors

$$H_i^* := \ker(\Phi_{L_i/K}|_{I_K(\mathfrak{m}_i)}) = P_{\mathfrak{m}_i} \cdot N_{L_i/K}(I_{L_i}(\widetilde{\mathfrak{m}_i})) \in \mathbb{H}(L_i/K).$$

Il reste à montrer que $H_i^* = H_i$ ($i = 1, 2$) pour terminer la preuve. Regardons déjà pour $i = 1$. On se souvient que $H_1 = P_{\mathfrak{m}_1} \cdot (I_K(\mathfrak{m}_1))^n \cdot I_K[S_2]$. Soit $\mathfrak{p} \in S_2$. On a vu en (I) que \mathfrak{p} se décompose totalement dans L_1 , donc est la norme d'un idéal de L_1 qui est premier et dans $I_{L_1}(\widetilde{\mathfrak{m}_1})$. Donc, $I_K[S_2] \subset N_{L_1/K}(I_{L_1}(\widetilde{\mathfrak{m}_1}))$. D'autre part, $I_K(\mathfrak{m}_1)/H_1^* \stackrel{\text{appl.d'Artin}}{\simeq} \text{Gal}(L_1/K)$ qui est par hypothèse d'exposant n . Donc $I_K(\mathfrak{m}_1)^n \subset H_1^*$. Ce qui montre que $H_1 \subset H_1^*$. On montre de même que $H_2 \subset H_2^*$. Il reste à voir, pour terminer le théorème, que les indices de H_i et H_i^* dans $I_K(\mathfrak{m}_i)$ sont égaux (pour $i = 1, 2$). Autrement dit, on sait que

$$[I_K(\mathfrak{m}_i) : H_i] \geq [I_K(\mathfrak{m}_i) : H_i^*] = [L : K] \stackrel{(*)}{=} [W_i : W_i \cap K^{*n}],$$

et il faut montrer qu'il y a égalité. Tout se résume donc à montrer que

$$\frac{[I_K(\mathfrak{m}_1) : H_1] \cdot [I_K(\mathfrak{m}_2) : H_2]}{[W_1 : W_1 \cap K^{*n}] \cdot [W_2 : W_2 \cap K^{*n}]} = 1. \quad (**)$$

En vertu de la Remarque b), du Chapitre 8 et du Lemme (8.3) b), on a pour $i = 1, 2$,

$$I_K(\mathfrak{m}_i)/H_i \simeq I_K^S/(I_K^S \cap H_i),$$

où, bien sûr, $I_K^S = I_K(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2)$.

Lemme A

On a, pour $i = 1, 2$

$$K^*/(K^{*n} \cdot K^{*S} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*) \simeq I_K^S/(I_K^S \cap H_i).$$

Preuve du Lemme A

Regardons l'application f composée

$$K^* \xrightarrow{\iota} I_K \xrightarrow{j} I_K^S$$

où, comme toujours, l'application ι est définie par $\iota(a) = a \cdot O_K$, qu'on note parfois (a) quand il n'y a pas d'ambiguïté et $j(\mathfrak{p}) = \begin{cases} \mathfrak{p} & \text{si } \mathfrak{p} \notin S \\ O_K & \text{si } \mathfrak{p} \in S \end{cases}$.

- a) f est surjective : soit $\mathfrak{a} \in I_K^S$. Par la propriété (iii) de S , il existe $\alpha \in K^*$ et $\mathfrak{b} \in I_K[S]$ tels que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot (\alpha)$. Ainsi, $f(\alpha) = j(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}^{-1}) = \mathfrak{a}$.
- b) Il reste à voir que $\{\alpha \in K^* \mid f(\alpha) \in H_i\} = K^{*n} \cdot K^{*S} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*$ pour $i = 1, 2$. Montrons déjà “ \subset ”. Soit $\alpha \in K^*$ tel que $f(\alpha) \in H_i$. Ecrivons $\iota(\alpha) = \mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{a}_1$, avec $\mathfrak{a}_0 \in I_K[S]$ et $\mathfrak{a}_1 \in I_K^S$; on a donc $f(\alpha) = \mathfrak{a}_1 \in H_i$. Ainsi, par définition de H_i , $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{b}^n \cdot (\beta) \cdot \mathfrak{c}$, avec $\mathfrak{b} \in I_K(\mathfrak{m}_i)$, $\beta \in K_{\mathfrak{m}_i}^*$ et $\mathfrak{c} \in I_K[S_{3-i}]$, et, comme en a), on peut écrire $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_0 \cdot (\theta)$ avec $\mathfrak{b}_0 \in I_K[S]$ et $\theta \in K^*$. Alors, $(\alpha \cdot \theta^{-n} \cdot \beta^{-1}) = \mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{b}_0^n \cdot \mathfrak{c} \in I_K[S]$, i.e. $\alpha \cdot \theta^{-n} \cdot \beta^{-1} \in K^{*S}$, ce qui montre que $\alpha \in K^{*n} \cdot K^{*S} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*$. Montrons maintenant “ \supset ”.
 i) Si $\alpha \in K_{\mathfrak{m}_i}^*$, alors écrivons $(\alpha) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, avec $\mathfrak{a} \in I_K^{S_{3-i}}$ et $\mathfrak{b} \in I_K[S_{3-i}]$. Comme α , donc aussi \mathfrak{a} est premier à \mathfrak{m}_i , on a $\mathfrak{a} \in I_K^S$. Et alors $f(\alpha) = \mathfrak{a} = (\alpha)^{-1} \cdot \mathfrak{b} \in P_{\mathfrak{m}_i} \cdot I_K[S_{3-i}] \subset H_i$.
 ii) $f(K^{*S}) = \{O_K\} \subset H_i$.
 (iii) $f(K^{*n}) = f(K^*)^n \subset (I_K^S)^n \subset I_K(\mathfrak{m}_i)^n \subset H_i$.

Ce qui achève la preuve du Lemme A.

$\not\equiv$ (Lemme A)

Lemme B

Soient A, B, C des sous-groupes d'un groupe abélien T (noté multiplicativement). On suppose que $B \subset A$ et $[A : B] < \infty$. Alors

$$[A : B] = [AC : BC] \cdot [A \cap C : B \cap C].$$

Preuve du Lemme B

Prenant $\beta : T \rightarrow T/C$ restreint à A , le Lemme (6.1) nous apprend que

$$[A : B] = [\beta(A) : \beta(B)] \cdot [\ker(\beta) : \ker(\beta) \cap B].$$

Dans notre cas, $\beta(A) = AC/C$ et $\beta(B) = BC/C$. Donc, $[\beta(A) : \beta(B)] = [AC : BC]$ et $\ker(\beta) = A \cap C$ et $B \cap \ker(\beta) = B \cap A \cap C = B \cap C$. \neq (Lemme B)

Reprenons le fil de notre calcul : il est évident (transitivité des indices) que pour $i = 1, 2$:

$$[K^* : K^{*n} \cdot K^{*S} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*] = \frac{[K^* : K^{*n} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*]}{[K^{*n} \cdot K^{*S} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^* : K^{*n} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*]}.$$

On applique le Lemme B à $A = K^{*n} \cdot K^{*S}$, $B = K^{*n}$ et $C = K_{\mathfrak{m}_i}^*$, ce qui donne

$$[K^{*n} \cdot K^{*S} : K^{*n}] = [K^{*n} \cdot K^{*S} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^* : K^{*n} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*] \cdot \underbrace{[(K^{*n} \cdot K^{*S}) \cap K_{\mathfrak{m}_i}^* : K^{*n} \cap K_{\mathfrak{m}_i}^*]}_{=W_{3-i}}.$$

Rappelons que

$$K^{*n} \cdot K^{*S} / K^{*n} \stackrel{\text{thm. d'isom}}{\simeq} K^{*S} / (K^{*S} \cap K^{*n}) = K^{*S} / (K^{*S})^n$$

et le dernier de ces groupes à $n^{|S|}$ éléments en vertu du Corollaire (9.5). Et on a $W_{3-i} = K^{*n} \cdot K^{*S} \cap K_{\mathfrak{m}_i}^*$ et $W_{3-i} \cap K^{*n} = K^{*n} \cap K_{\mathfrak{m}_i}^*$. Enfin, on résume tout ce que nous venons de voir depuis la relation (**):

$$\begin{aligned} [I_K(\mathfrak{m}_i) : H_i] &= [I_K^S : I_K^S \cap H_i] \stackrel{\text{Lemme A}}{=} [K^* : K^{*n} \cdot K^{*S} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*] \\ &= \frac{[K^* : K^{*n} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*]}{[K^{*n} \cdot K^{*S} : K^{*n}]} \cdot [(K^{*n} \cdot K^{*S}) \cap K_{\mathfrak{m}_i}^* : K^{*n} \cap K_{\mathfrak{m}_i}^*] \\ &= \frac{[K^* : K^{*n} \cdot K_{\mathfrak{m}_i}^*]}{n^{|S|}} = c(\mathfrak{m}_i) \cdot [W_{3-i} : W_{3-i} \cap K^{*n}]. \end{aligned}$$

Finalement, pour prouver la relation (**), il reste à montrer la relation :

$$c(\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2) := c(\mathfrak{m}) = n^{2 \cdot |S|}. \quad (***)$$

Posons alors $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p} \in S'} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}$, où S' est l'ensemble des places non complexes de S . Alors on a $c(\mathfrak{m}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S'} c(\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}})$ (cf. Théorème (9.7) a)). Soit $S_0 \subset S'$ le sous-ensemble des places finies de S' . Soit $\mathfrak{p} \in S_0$. Dans la partie c) du même théorème, on a vu que $c(\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}) = n^2 \cdot [O_{\mathfrak{p}} : n \cdot O_{\mathfrak{p}}]$ (si $n_{\mathfrak{p}}$ est assez grand). Ainsi,

$$\begin{aligned} \prod_{\mathfrak{p} \in S_0} c(\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}) &= n^{2|S_0|} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S_0} [O_{\mathfrak{p}} : n \cdot O_{\mathfrak{p}}] \\ &= n^{2|S_0|} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S_0} [O_{\mathfrak{p}} : \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(n)} O_{\mathfrak{p}}] \\ &= n^{2|S_0|} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in S_0} [O_K : \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(n)}]. \end{aligned}$$

Par le théorème chinois, on a

$$\prod_{\mathfrak{p} \in S_0} |O_K / \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(n)}| = \left| O_K / \prod_{\mathfrak{p} \in S_0} \mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}(n)} \right| \stackrel{\text{cond. ii}}{=} |O_K / n \cdot O_K| = n^{[K:\mathbb{Q}]}.$$

Ce qui montre que

$$\prod_{\mathfrak{p} \in S_0} c(\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}) = n^{2|S_0| + [K:\mathbb{Q}]}.$$

Soit r (resp. s) le nombre de places réelles (resp. complexes) de K . On sait que $r + 2s = [K : \mathbb{Q}]$.

Si $r = 0$, alors $[K : \mathbb{Q}] = 2s$ et $S' = S_0$. Ainsi, $c(\mathfrak{m}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S_0} c(\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}) = n^{2|S_0|+2s} = n^{2(|S_0|+s)} = n^{2 \cdot |S|}$, car on se souvient que S contient toutes les places infinies (condition i)).

Si $r > 0$, alors $n = 2$ (se souvenir pourquoi...) et en vertu du Théorème (9.7) b), on a $c(\mathfrak{m}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S_0} c(\mathfrak{p}^{n_{\mathfrak{p}}}) \cdot 2^r = (2^{2|S_0|+r+2s}) \cdot 2^r = 2^{2 \cdot |S|}$. Ce qui achève la démonstration du théorème. \neq

Enfin, nous pouvons achever la preuve de ce grand et beau théorème

Fin de la preuve du théorème d'existence du corps de classe

Soit donc \mathbb{H} une classe de sous-groupes de congruence. On rappelle qu'on peut supposer que K contient les racines n -ièmes de l'unité et que n est un exposant de I_K/\mathbb{H} . Soit \mathfrak{m} un K -module multiple de $\mathfrak{f}(\mathbb{H})$ et $H(\mathfrak{m}) \in \mathbb{H}$ le sous-groupe de congruence défini modulo \mathfrak{m} .

Appliquons le Théorème (10.2) au cas où $S_2 = \emptyset$ et $\mathfrak{m}_2 = 1 = O_K \cdot \emptyset$. Suppose que S_1 soit construit de telle manière que $S = S_1$ satisfasse les conditions i), ii), iii) du Théorème (10.2) et contiennent en plus toutes les places qui divisent \mathfrak{m} . Et on définit \mathfrak{m}_1 toujours comme dans le Théorème (10.2) avec en plus $\mathfrak{m}|\mathfrak{m}_1$, donc $H(\mathfrak{m}_1)$ existe. Le groupe H_1 du Théorème (10.2) est ici

$$H_1 = P_{\mathfrak{m}_1} \cdot (I_K(\mathfrak{m}_1))^n \cdot (1) \subset H(\mathfrak{m}_1), \quad (+)$$

car, par hypothèse $I_K(\mathfrak{m}_1)/H(\mathfrak{m}_1)$ est d'exposant n . Par le Théorème (10.2), il existe L_1/K une extension abélienne telle que $H_1 \in \mathbb{H}(L_1/K)$. Par la relation (+) et par le Corollaire-Définition (8.5), cela implique que $\mathbb{H}(L_1/K) \subset \mathbb{H}$. Donc, en vertu du Théorème (8.12), il existe L/K une extension abélienne telle que $\mathbb{H} = \mathbb{H}(L/K)$. Et c'est ce qu'il fallait démontrer. \neq

Application à des extensions non abéliennes

Soit E/K une extension galoisienne de corps de nombres de groupe de Galois G . Notons $G' = D(G : G)$ le sous-groupe engendré par les commutateurs $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$. Dans la littérature, les gens notent plutôt $[G : G]$ plutôt que $D(G, G)$. Mais $[\cdot, \cdot]$ dénote déjà deux notions : l'indice d'un groupe dans un autre et la dimension d'un corps dans un autre, nous n'allons pas encore "charger" la notation ! On voit facilement que G' est normal dans G et $G^{\text{ab}} = G/G'$ est l'abélianisé de G (qui est le plus grand quotient abélien de G). On définit une application d'Artin

$$\Phi_{E/K} : I_K(\mathfrak{m}) \longrightarrow G^{\text{ab}},$$

pourvu que le K -module \mathfrak{m} soit divisible par toutes les places de K qui ramifient dans E ainsi : si $\mathfrak{p} \in I_K(\mathfrak{m})$, on choisit un idéal \mathfrak{P} de E au-dessus de \mathfrak{p} et on pose $\Phi_{E/K}(\mathfrak{p}) = \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cdot G' \in G^{\text{ab}}$. L'application est bien définie pour \mathfrak{p} , car si on avait pris un autre premier \mathfrak{P}' au-dessus de \mathfrak{p} , l'élément $\text{Frob}(\mathfrak{P}'/\mathfrak{p})$ est un conjugué de $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ et on voit facilement qu'ils représentent la même classe dans G^{ab} ; et on prolonge comme toujours par multiplicativité. Si L est la sous-extension de E/K fixe par G' , alors L/K est la plus grande sous-extension abélienne de E/K . Soit \mathfrak{m} , comme avant, un K -module divisible par les places de K qui ramifient dans E et supposons que les exposants des diviseurs finis

de \mathfrak{m} soient assez grand pour que \mathfrak{m} soit admissible pour toutes les sous-extensions abéliennes de E/K (c'est possible en vertu du théorème de réciprocité d'Artin (Théorème (7.14)) et puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de telles sous-extensions. Considérons la classe de sous-groupes de congruence qui contient le sous-groupe $P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}})) = H(\mathfrak{m})$ (qui est défini modulo \mathfrak{m}). Soit F/K l'extension abélienne correspondant à cette classe de sous-groupes de congruence, i.e. $P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}})) \in \mathbb{H}(F/K)$ (cette extension existe, bien sûr, en vertu du théorème d'existence du corps de classe).

Théorème (10.3)

Sous les mêmes hypothèses que précédemment, alors on a

- 1) $\ker(\Phi_{L/K}) = \ker(\Phi_{E/K})$
- 2) $F = L$.
- 3)

$$[I_K(\mathfrak{m}) : P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}}))] = [G : G'] \leq G = [E : K],$$

où $\tilde{\mathfrak{m}}$ est l'extension de \mathfrak{m} à E ; et l'inégalité est évidemment stricte si G n'est pas abélien.

On voit donc que la première inégalité du corps de classe reste vraie dans les extension non abélienne, mais en aucun cas l'égalité, ce qui rend impossible le théorème de réciprocité d'Artin et donc, dans une certaine mesure la possibilité par cette méthode de bien cerner les extension non abéliennes.

Preuve

Prouvons 1). L'application de restriction $G \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ induit un isomorphisme $T : G/G' \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ et $\Phi_{L/K} = T \circ \Phi_{E/K}$. En effet, si $\mathfrak{p} \in I_K(\mathfrak{m})$, \mathfrak{P}_0 dans L au-dessus de \mathfrak{p} et \mathfrak{P} dans E au-dessus de \mathfrak{P}_0 . On sait que $\text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{P}_0) = \text{Frob}_{E/K}(\mathfrak{P})|_L$, donc $\Phi_{L/K}(\mathfrak{p}) = T \circ \Phi_{E/K}(\mathfrak{p})$ et on conclut par multiplicativité. Cela prouve en particulier que $\ker(\Phi_{L/K}) = \ker(\Phi_{E/K})$.

Prouvons 2). Soit \mathfrak{n} un K -module admissible pour F/K et multiple de \mathfrak{m} . Alors on a $N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{n}})) \subset N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}})) \subset N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}})) \cdot P_{\mathfrak{m}} = H(\mathfrak{m})$, où $\tilde{\mathfrak{m}}$ est le E -module qui prolonge \mathfrak{m} . Donc

$$N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{n}})) \subset H(\mathfrak{m}) \cap I_K(\mathfrak{n}) \stackrel{\mathfrak{n} \text{ multiple de } \mathfrak{m}}{=} H(\mathfrak{n}) \stackrel{\mathfrak{n} \text{ admissible pour } F/K}{=} P_{\mathfrak{n}} \cdot N_{F/K}(I_F(\tilde{\mathfrak{n}}'))$$

où $\tilde{\mathfrak{n}}'$ est le F -module qui prolonge \mathfrak{n} . Cela montre, en vertu du Corollaire (7.16) que $F \subset E$. Ainsi, par hypothèse, \mathfrak{m} est admissible pour F/K , ce qui veut dire que

$$P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}})) = H(\mathfrak{m}) = P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{F/K}(I_F(\tilde{\mathfrak{m}}')) = \ker(\Phi_{F/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}) = \ker(\Phi_{E/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}), \quad (*)$$

la dernière égalité se montrant comme lors de la partie 1), puisque F/K est une sous-extension (abélienne) de E/K . Soit maintenant $K \subset F \subset L_1 \subset E$, avec L_1/K abélienne. Alors $N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}})) \subset N_{L_1/K}(I_{L_1}(\tilde{\mathfrak{m}}'')) \subset N_{F/K}(I_F(\tilde{\mathfrak{m}}'))$, où $\tilde{\mathfrak{m}}''$ est le L_1 -module qui prolonge \mathfrak{m} . Ainsi,

$$P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}})) \subset P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L_1/K}(I_{L_1}(\tilde{\mathfrak{m}}'')) \subset P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{F/K}(I_F(\tilde{\mathfrak{m}}')).$$

Or, la relation (*) nous montre que le premier et le troisième groupe sont égaux. Donc il y a égalité partout. En particulier,

$$N_{F/K}(I_F(\tilde{\mathfrak{m}}')) \subset P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L_1/K}(I_{L_1}(\tilde{\mathfrak{m}}'')),$$

ce qui prouve, en vertu du Corollaire (7.16) et puisque par hypothèse \mathfrak{m} est admissible pour L_1/K que $L_1 \subset F$. Ainsi, $L_1 = F$, ce qui veut dire que F est la sous-extension abélienne maximale de E/K , et donc que $L = F$.

Prouver 3) est alors un jeu d'enfant : la partie 2) et l'équation (*) nous montrent que $\ker(\Phi_{L/K}|I_K(\mathfrak{m})) = P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}}))$. Ainsi,

$$I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}})) \simeq G/G' = G^{\text{ab}}$$

ou encore,

$$[I_K(\mathfrak{m}) : P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{E/K}(I_E(\tilde{\mathfrak{m}}))] = [G : G'] \leq |G|,$$

et c'est ce qu'il fallait démontrer. #

Chapitre 11

Symbole de restes normiques, conducteur et corps de classe de Hilbert

Dans ce chapitre nous allons montrer que le conducteur d'une extension abélienne est admissible, donc il correspond à un sous-groupe de congruence qui est le noyau de l'application d'Artin d'une extension. Cela impliquera l'existence du corps de Hilbert (que nous construisons à la fin de ce chapitre).

Pour parvenir à la preuve de tout cela, nous allons définir et donner quelques propriétés d'une application importante : l'application $\theta_{\mathfrak{p}}$ qu'on nomme *symbole de restes normiques* qui interviendra à la fin du chapitre 13 (Définition (13.30)) et qui sera crucial dans les résultats du corps de classe local (Proposition-Définition (14.9)).

Fixons pour ce chapitre L/K une extension abélienne de corps de nombres de groupe G , et posons $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(L/K)$, le conducteur de cette extension.

Commençons par donner un résultat qui a déjà été partiellement prouvé (Lemme (7.5))

Théorème (11.1)(Lemme de translation)

Sous les mêmes hypothèses, considérons E/K une extension quelconque finie de K . Alors, $\mathbb{H}(EL/E)$ est l'extension à E par les normes de $\mathbb{H}(L/K)$. Plus précisément, si \mathfrak{m} est un K -module multiple de $\mathfrak{f}(L/K)$, alors l'extension $\tilde{\mathfrak{m}}$ de \mathfrak{m} à L est un multiple de $\mathfrak{f}(EL/E)$, et on a la relation suivante qui lie les groupes de congruences :

$$H(\tilde{\mathfrak{m}}) = \{\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \mid N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{m})\},$$

où $H(\tilde{\mathfrak{m}}) = H(\tilde{\mathfrak{m}}, EL/E)$ est le sous-groupe de congruence pour $\tilde{\mathfrak{m}}$ de la classe $\mathbb{H}(EL/E)$ et $H(\mathfrak{m}) = H(\mathfrak{m}, L/K)$ est le sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m} de la classe $\mathbb{H}(L/K)$.

Preuve

Soit \mathfrak{m} un K -module admissible pour L/K et $\tilde{\mathfrak{m}}$ l'extension de \mathfrak{m} à L . On sait (cf. Théorème (0.6)) que $\Phi_{EL/E}$ est définie sur $I_E(\tilde{\mathfrak{m}})$ et que $R \circ \Phi_{EL/E} = \Phi_{L/K} \circ N_{E/K}$, où $R : \text{Gal}(EL/E) \rightarrow G$ est l'injection donnée par la restriction à L des E -automorphismes de EL . Le Lemme (7.5) nous dit que $\tilde{\mathfrak{m}}$ est admissible pour EL/E . Ainsi,

$$\begin{aligned} H(\tilde{\mathfrak{m}}) &= \ker(\Phi_{EL/E} \mid I_E(\tilde{\mathfrak{m}})) = \{\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \mid N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in \ker(\Phi_{L/K} \mid I_K(\mathfrak{m}))\} = \\ &= \{\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \mid N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{m})\}. \end{aligned}$$

Et donc le résultat est prouvé pour les \mathfrak{m} admissibles. Supposons maintenant que \mathfrak{m} soit un K -module tel que $\mathfrak{f} \mid \mathfrak{m}$ et posons $A_{\tilde{\mathfrak{m}}} = \{\mathfrak{a} \in I_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \mid N_{E/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{m})\}$. On vient de voir que $A_{\tilde{\mathfrak{m}}} = H(\tilde{\mathfrak{m}})$ si \mathfrak{m} est admissible. Or, on montre très facilement que si $\mathfrak{f} \mid \mathfrak{m}$, $A_{\tilde{\mathfrak{m}}} = A_{\tilde{\mathfrak{f}}} \cap I_E(\tilde{\mathfrak{m}})$. Ainsi $\{A_{\tilde{\mathfrak{m}}} \mid \mathfrak{f} \mid \mathfrak{m}\}$ est dans une même classe d'équivalence de sous-groupes de congruence. Donc, $\{A_{\tilde{\mathfrak{m}}} \mid \mathfrak{f} \mid \mathfrak{m}\} \subset \mathbb{H}(EL/E)$, puisque c'est le cas pour les \mathfrak{m} admissibles. On en déduit que $\mathfrak{f}(EL/E) \mid \tilde{\mathfrak{m}}$ et, par unicité du groupe de congruence pour \mathfrak{m} , $A_{\tilde{\mathfrak{m}}} = H(\tilde{\mathfrak{m}})$ pour tout $\mathfrak{m} \mid \mathfrak{f}$. ≠

Définition (11.2)

Un K -module \mathfrak{n} est dit \mathfrak{p} -admissible s'il est admissible (pour L/K que nous avons supposée abélienne de groupe G) et si $\mathfrak{p}|\mathfrak{n}$. On peut alors écrire $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$, avec $a \geq 1$ et $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$. Supposons donc \mathfrak{n} \mathfrak{p} -admissible. On appelle $\Theta (= \Theta(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m}))$, l'homomorphisme obtenu par composition des applications

$$\Theta : K_{\mathfrak{m}}^* \xrightarrow{\iota} I_K \xrightarrow{j} I_K(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{n})}} G,$$

où $\iota(x) = x \cdot O_K$ et $j = j_{\mathfrak{n}}$ est l'homomorphisme défini sur les idéaux premiers \mathfrak{q} de la manière suivante : $j(\mathfrak{q}) = \begin{cases} \mathfrak{q} & \text{si } \mathfrak{q} \nmid \mathfrak{n} \\ O_K & \text{si } \mathfrak{q}|\mathfrak{n} \end{cases}$. Rappelons que $Z(\mathfrak{p}) = Z(L/\mathfrak{p}) = \{\sigma \in G \mid \sigma(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}\}$ où \mathfrak{P} est n'importe quel idéal premier de L au-dessus de \mathfrak{p} .

Théorème (11.3)

Sous les mêmes hypothèses que pour la définition précédente, on a

$$\text{Im}(\Theta) = Z(\mathfrak{p}).$$

Preuve

Montrons “ \subset ” : Posons F le sous-corps de L fixe par $Z(\mathfrak{p})$. On se souvient que F est la plus grande sous-extension de L dans laquelle \mathfrak{p} se décompose complètement (cf. [Mar, Thm. 29 (1), p.104]) (c'est aussi valable pour les places infinies, mais dans ce cas décomposer complètement veut simplement dire ne pas ramifier). En particulier, \mathfrak{p} ne ramifie pas dans F . Cela implique, en vertu du Lemme (8.8) que $\mathfrak{p} \nmid f(F/K)$. D'autre part, puisque $F \subset L$, on a $f(F/K) | f(L/K)$ (cf. Proposition (8.9)). Ainsi, $f(F/K) | \mathfrak{m}$. De plus, les places de K qui ramifient dans F divisent \mathfrak{m} (puisque c'est une partie de celles qui ramifient dans L et que \mathfrak{p} n'en fait pas partie). Donc, en vertu du Lemme (8.7), cela veut dire que \mathfrak{m} est admissible pour F/K et donc (Lemme (7.2)) :

$$\ker(\Phi_{F/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}) = P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{F/K}(I_F(\tilde{\mathfrak{m}})), \quad (*)$$

où $\tilde{\mathfrak{m}}$ est l'extension de \mathfrak{m} à F .

Supposons \mathfrak{p} finie. Puisque \mathfrak{p} décompose complètement dans F et $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$, alors $\mathfrak{p} \in \ker(\Phi_{F/K} | I_K(\mathfrak{m}))$. Soit maintenant $\alpha \in K_{\mathfrak{m}}^*$. Par définition, on a $\iota(\alpha) = \mathfrak{p}^s \cdot \mathfrak{a}$, où $s \in \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{n})$. Alors $j(\iota(\alpha)) = \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^{-s} \cdot \iota(\alpha) \in \ker(\Phi_{F/K} | I_K(\mathfrak{m}))$, car \mathfrak{p} est dans ce noyau et $\iota(\alpha) \in P_{\mathfrak{m}} \stackrel{(*)}{\subset} \ker(\Phi_{F/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$.

Supposons \mathfrak{p} infinie. Dans ce cas, $I_K(\mathfrak{m}) = I_K(\mathfrak{n})$ et pour tout $\alpha \in K_{\mathfrak{m}}^*$, on a $j(\iota(\alpha)) = \iota(\alpha) \in P_{\mathfrak{m}} \stackrel{(*)}{\subset} \ker(\Phi_{F/K}|_{I_K(\mathfrak{m})})$. Donc dans les deux cas (fini et infini), on a

$$1_G = \Phi_{F/K}(j(\iota(\alpha))) = \Phi_{L/K}(j(\iota(\alpha)))|_F = \Theta(\alpha)|_F.$$

Cela montre que $\Theta(\alpha) \in Z(\mathfrak{p})$, par la théorie de Galois. Ainsi, on a prouvé que $\text{Im}(\Theta) \subset Z(\mathfrak{p})$.

La preuve de l'inclusion inverse “ \supset ” se fait par l'absurde. Supposons donc que $\text{Im}(\Theta) \subsetneq Z(\mathfrak{p})$. Un raisonnement facile sur les groupes abéliens finis nous assure l'existence d'un sous-groupe G_0 tel que $\text{Im}(\Theta) \subset G_0 \subset Z(\mathfrak{p})$, avec $[Z(\mathfrak{p}) : G_0] = q \in \mathbb{P}(\mathbb{Q})$. Posons E le sous-corps de L fixe par G_0 et comme pour la partie “ \subset ”, F le sous-corps de L fixe par $Z(\mathfrak{p})$. On a donc $K \subset F \subset E \subset L$, avec $[E : F] = q$.

Soit ζ une racine primitive q -ième de l'unité. On pose $F' = F(\zeta)$ et $E' = E(\zeta)$. On est donc dans la situation :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & F' = F(\zeta) & \subset & E' = EF' & & \\
 & & \cup & & \cup & & \\
 K & \subset & F & \subset & E & \subset & L \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{G/G_0} & & \underbrace{\hspace{4em}}_{G/Z(\mathfrak{p})} & & \underbrace{\hspace{4em}}_{Z(\mathfrak{p})/G_0} & & \underbrace{\hspace{4em}}_{G_0}
 \end{array}$$

On veut appliquer le Théorème (10.2), les rôles de K et de n étant tenus ici par F' et q respectivement. De plus, posons S_1 , l'ensemble des places de F' au-dessus de \mathfrak{p} et S_2 un ensemble fini de places de F' disjoint de S_1 tel que $S = S_1 \cup S_2$ vérifie les conditions $i) - iii)$ du Théorème (10.2). Prenons encore \mathfrak{m}_1 , l'extension à F' de \mathfrak{p}^b , avec $b \geq 1$ assez grand si \mathfrak{p} est finie; et \mathfrak{m}_2 le produit de toutes les places non complexes de S_2 , avec des exposants assez grands pour les places finies (toujours pour appliquer le même Théorème (10.2)). On supposera de plus que $\tilde{\mathfrak{m}}|\mathfrak{m}_2$ et que $\tilde{\mathfrak{n}}|\mathfrak{m}_1 \cdot \mathfrak{m}_2$, où $\tilde{\mathfrak{m}}$ et $\tilde{\mathfrak{n}}$ sont les extensions à F' de \mathfrak{m} et de \mathfrak{n} .

Considérons alors le H_2 et le L_2 du même Théorème (10.2). Rappelons que

$$H_2 = I_{F'}(\mathfrak{m}_2)^q \cdot P_{F', \mathfrak{m}_2} \cdot I_{F'}[S_1], \text{ et que } L_2 \text{ est une } q\text{-extension de Kummer de } F'.$$

Le même Théorème (10.2) nous apprend que $H_2 = H(\mathfrak{m}_2, L_2/F')$ est le sous-groupe de congruence dans $\mathbb{H}(L_2/F')$ défini modulo \mathfrak{m}_2 et que \mathfrak{m}_2 est admissible pour l'extension L_2/F' . On va appliquer le lemme de translation (Théorème (11.1)) au diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 & E' = EF' & \\
 E & \nearrow & \\
 & F' & \\
 K & \nwarrow &
 \end{array}$$

Puisque \mathfrak{n} est admissible pour L/K alors, en vertu du Lemme (7.4), \mathfrak{n} est admissible pour E/K . Par le lemme de translation et sa preuve, l'extension $\tilde{\mathfrak{n}}$ de \mathfrak{n} à F' est aussi admissible pour E'/F' et (rappelons-le)

$$H(\tilde{\mathfrak{n}}, E'/F') = \{\mathfrak{a} \in I_{F'}(\tilde{\mathfrak{n}}) \mid N_{F'/K}(\mathfrak{a}) \in H(\mathfrak{n}, E/K)\}, \quad (**)$$

où $H(\tilde{\mathfrak{n}}, E'/F')$ est le sous-groupe de congruence pour $\tilde{\mathfrak{n}}$ de la classe $\mathbb{H}(E'/F')$ et $H(\mathfrak{n}, E/K)$ est le sous-groupe de congruence pour \mathfrak{n} de la classe $\mathbb{H}(E/K)$.

D'autre part, par hypothèse (absurde), $\Theta(K_{\mathfrak{m}}^*) \subset G_0$, c'est-à-dire que $\Phi_{L/K}|I_K(\mathfrak{n})$ envoie $j(\iota(K_{\mathfrak{m}}^*))$ dans G_0 , qui est le sous-groupe de G formé des éléments qui sont l'identité sur E . Ainsi,

$$j(\iota(K_{\mathfrak{m}}^*)) \subset \ker(\Phi_{E/K}|I_K(\mathfrak{n})) = H(\mathfrak{n}, E/K). \quad (***)$$

On va démontrer que

$$H_2 \cap I_{F'}(\tilde{\mathfrak{n}}) \subset H(\tilde{\mathfrak{n}}, E'/F'). \quad (\dagger)$$

Considérons donc, $\mathfrak{X} \in H_2$, un idéal premier à $\tilde{\mathfrak{n}}$. Par définition de H_2 , on a $\mathfrak{X} = \mathcal{B}^q \cdot (\alpha) \cdot \mathcal{C}$, avec $\mathcal{B} \in I_{F'}(\mathfrak{m}_2)$, $\alpha \in F'^*_{\mathfrak{m}_2}$ et $\mathcal{C} \in I_{F'}[S_1]$ (cf. Chapitres 9 et 10 pour la définition de ces objets). Il faut donc montrer (en vertu de (**)) que $N_{F'/K}(\mathfrak{X}) \in H(\mathfrak{n}, E/K)$.

Supposons \mathfrak{p} fini. On peut écrire $\mathcal{B} = \mathcal{B}_0 \cdot \mathcal{B}_1$ avec \mathcal{B}_0 premier à $\tilde{\mathfrak{n}}$ et $N_{F'/K}(\mathcal{B}_1) = \mathfrak{p}^r$, $\iota(\alpha) = (\alpha) = \mathfrak{a}_0 \cdot \mathfrak{a}_1$, avec \mathfrak{a}_0 premier à $\tilde{\mathfrak{n}}$ et $N_{F'/K}(\mathfrak{a}_1) = \mathfrak{p}^s$ et, par définition de S_1 , $N_{F'/K}(\mathcal{C}) = \mathfrak{p}^t$. On a $r \cdot q + s + t = 0$, car $\mathfrak{X} \in I_{F'}(\tilde{\mathfrak{n}})$, et donc $N_{F'/K}(\mathfrak{X})$ est premier à \mathfrak{p} . Cela implique que $N_{F'/K}(\mathfrak{X}) = N_{F'/K}(\mathcal{B}_0)^q \cdot N_{F'/K}(\mathfrak{a}_0)$.

On sait que $H(\mathfrak{n}, E/K) \subset H(\mathfrak{n}, F/K)$, où $H(\mathfrak{n}, F/K)$ est le sous-groupe de congruence pour \mathfrak{n} de la classe $\mathbb{H}(F/K)$ (cf. Proposition (8.9)). L'indice de $H(\mathfrak{n}, E/K)$ dans $H(\mathfrak{n}, F/K)$ vaut q . En effet, puisque \mathfrak{n} est admissible pour F/K et E/K ,

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{n}, F/K) &= \ker(\Phi_{F/K}|I_K(\mathfrak{n})) = \{\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{n}) \mid \Phi_{F/K}(\mathfrak{a}) = \Phi_{E/K}(\mathfrak{a})|_F = \text{Id}_F\} \\ &= \{\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{n}) \mid \Phi_{E/K}(\mathfrak{a}) \in \text{Gal}(E/F) \simeq Z(\mathfrak{p})/G_0\}. \end{aligned}$$

De même, $H(\mathfrak{n}, E/K) = \ker(\Phi_{E/K}|I_K(\mathfrak{n})) = \{\mathfrak{a} \in I_K(\mathfrak{n}) \mid \Phi_{E/K}(\mathfrak{a}) = \text{Id}_E\}$. On en déduit que $[H(\mathfrak{n}, F/K) : H(\mathfrak{n}, E/K)] = [Z(\mathfrak{p}) : G_0] = q$, car l'application d'Artin $\Phi_{E/K}$ est surjective (cf. Théorème (2.16)).

Par définition de \mathcal{B}_0 , on a $N_{F'/F}(\mathcal{B}_0) \in I_F(\tilde{\mathfrak{n}}')$, où $\tilde{\mathfrak{n}}'$ est l'extension de \mathfrak{n} à F . Puisque \mathfrak{n} est admissible pour L/K , il l'est aussi pour F/K (toujours en vertu du Lemme (7.4)), et alors on a :

$$N_{F'/F}(\mathcal{B}_0) = N_{F/K}(N_{F'/F}(\mathcal{B}_0) \in N_{F/K}(I_F(\tilde{\mathfrak{n}}')) \subset P_{\mathfrak{n}} \cdot N_{F/K}(I_F(\tilde{\mathfrak{n}}')) = H(\mathfrak{n}, F/K).$$

Cela implique, puisque $[H(\mathfrak{n}, F/K) : H(\mathfrak{n}, E/K)] = q$, que $N_{F'/F}(\mathcal{B}_0)^q \in H(\mathfrak{n}, E/K)$. D'autre part, puisque $\tilde{\mathfrak{m}}|\mathfrak{m}_2$,

$$N_{F'/K}(\alpha) \in N_{F'/K}(F'^*_{\mathfrak{m}_2}) \subset N_{F'/K}(F'^*_{\tilde{\mathfrak{m}}}) \subset K^*_{\mathfrak{m}}.$$

La dernière inclusion provient de la partie b) du Lemme (5.2). D'autre part, on a :

$$j(\iota(N_{F'/K}(\alpha))) = j(N_{F'/K}(\mathfrak{a}_0)) \cdot \underbrace{j(N_{F'/K}(\mathfrak{a}_1))}_{=\mathfrak{p}^s}^{\substack{=O_K \\ =\mathfrak{p}^s}} = N_{F'/K}(\mathfrak{a}_0).$$

Ainsi,

$$N_{F'/K}(\mathfrak{a}_0) \in j(\iota(K^*_{\mathfrak{m}})) \stackrel{(***)}{\subset} H(\mathfrak{n}, E/K).$$

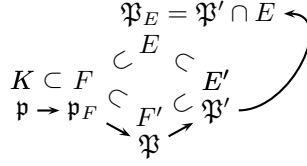
Ce qui montre que $N_{F'/K}(\mathfrak{X}) \in H(\mathfrak{n}, E/K)$, prouvant la relation (\dagger) dans le cas où \mathfrak{p} est fini. Si \mathfrak{p} est infini, on refait exactement le même calcul, avec quelques simplifications : dans ce cas, $\mathcal{C} = \mathfrak{a}_1 = \mathcal{B}_1 = O_K$.

Soient $H(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2, L_2/F')$ le sous-groupe de congruence pour $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2$ de la classe $\mathbb{H}(L_2/F')$, $\mathfrak{f}(L_2/F')$, le conducteur de l'extension L_2/F' et $H(\mathfrak{f}(L_2/F'))$ le sous-groupe de congruence associé à $\mathfrak{f}(L_2/F')$. Calculons :

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2, L_2/F') &= H(\mathfrak{f}(L_2/K)) \cap I_{F'}(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) \\ &= H(\mathfrak{f}(L_2/K)) \cap I_{F'}(\mathfrak{m}_2) \cap I_{F'}(\tilde{\mathfrak{n}}) \cap I_{F'}(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) \\ &= H_2 \cap I_{F'}(\tilde{\mathfrak{n}}) \cap I_{F'}(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) \\ &\stackrel{(\dagger)}{\subset} H(\tilde{\mathfrak{n}}, E'/F') \cap I_{F'}(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2) = H(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2, E'/F'). \end{aligned}$$

Cela implique, en vertu de la Proposition (8.9), que $E' \subset L_2$.

D'après la partie (I) du Théorème (10.2), les places de S_1 sont complètement décomposées dans L_2 , donc aussi dans E' . Soit \mathfrak{p}_F , une place de F au-dessus de \mathfrak{p} , \mathfrak{P} une place de F' au-dessus de \mathfrak{p}_F , \mathfrak{P}' , une place E' au-dessus de \mathfrak{P} et $\mathfrak{P}_E = \mathfrak{P}' \cap E$. On a donc la situation :



Comme $\mathfrak{P} \in S_1$, on a l'indice de ramification $e(\mathfrak{P}'/\mathfrak{P}) = 1$ et le degré de \mathfrak{P}' sur F' $f(\mathfrak{P}'/\mathfrak{P}) = 1$. Ainsi,

$$e(\mathfrak{P}'/\mathfrak{P}_E) \cdot e(\mathfrak{P}_E/\mathfrak{p}_F) = e(\mathfrak{P}'/\mathfrak{p}_F) = e(\mathfrak{P}'/\mathfrak{P}) \cdot e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}_F) = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}_F).$$

Mais, $[F' : F] \mid [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}] = q - 1$ (théorie de Galois), donc $e(\mathfrak{P}'/\mathfrak{P}_E) \cdot e(\mathfrak{P}_E/\mathfrak{p}_F) \mid q - 1$. D'autre part, $[E : F] = q$, donc $e(\mathfrak{P}_E/\mathfrak{p}_F) \mid q$. Cela implique que $e(\mathfrak{P}_E/\mathfrak{p}_F) = 1$. Le même calcul s'applique aux f , donc $f(\mathfrak{P}_E/\mathfrak{p}_F) = 1$. Mais alors cela veut dire que \mathfrak{p} est complètement décomposé dans E , ce qui contredit le fait que F est le plus grand sous-corps de L dans lequel \mathfrak{p} se décompose complètement. Cette contradiction implique que $\text{Im}(\Theta) \supset Z(\mathfrak{p})$ et achève la (longue) preuve de ce théorème. $\#$

Définition (11.4)

Soit K un corps de nombres. On rappelle que $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ est le localisé complété de K en la place \mathfrak{p} et $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \setminus \{0\}$. On note aussi $U_{\mathfrak{p}} = O_{\mathfrak{p}}^*$, le groupe des unités de l'anneau des entiers de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ et $\widehat{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}O_{\mathfrak{p}}$, l'idéal maximal de $O_{\mathfrak{p}}$.

Soit $b \geq 0$, on définit

$$U_{\mathfrak{p}}^{(b)} = \begin{cases} U_{\mathfrak{p}} & \text{si } b = 0 \text{ et } \mathfrak{p} \text{ fini} \\ 1 + \widehat{\mathfrak{p}}^b & \text{si } b > 0 \text{ et } \mathfrak{p} \text{ fini} \\ U_{\mathfrak{p}} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* = \mathbb{R}^* & \text{si } b = 0 \text{ et } \mathfrak{p} \text{ infini réel} \\ \mathbb{K}_{\mathfrak{p},+}^* = \mathbb{R}_+^* & \text{si } b > 0 \text{ et } \mathfrak{p} \text{ infini réel} \\ U_{\mathfrak{p}} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* = \mathbb{C}^* & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est infinie complexe.} \end{cases}$$

On avait déjà défini cet objet au Chapitre 5 (Définition (5.7)), mais ici la définition est étendue dans le cas des places infinies et si $b = 0$. Il est évident que si $b' \geq b$, alors $U_{\mathfrak{p}}^{(b')} \subset U_{\mathfrak{p}}^{(b)}$. Il s'agit aussi d'étendre la définition de (mod^*) . On l'avait déjà fait partiellement à la Définition (5.7), mais nous allons ici encore un peu plus loin : si $x, y \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$, on écrit $x \equiv y \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^b}$ si $\frac{x-y}{y} \in \widehat{\mathfrak{p}}^b$ pour les places finies et $b > 0$. Si $b = 0$ ou \mathfrak{p} complexe, cela veut dire que $\frac{x}{y} \in U_{\mathfrak{p}}$ et enfin si $b > 0$ dans le cas des places infinie réelle, cela veut dire que x et y ont le même signe. Autrement dit, et pour faire court, si $x, y \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$, $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ et $b \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$x \equiv y \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^b} \iff \frac{x}{y} \in U_{\mathfrak{p}}^{(b)}.$$

Proposition (11.5)

Soit K un corps de nombres, \mathfrak{m} un K -module, $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K) \setminus \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(K)$ avec $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$ et $b \in \mathbb{N}$. Alors la composition d'homomorphisme

$$K_{\mathfrak{m}}^* \hookrightarrow \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \twoheadrightarrow \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/U_{\mathfrak{p}}^{(b)},$$

est surjective (où la première application est l'inclusion et la seconde, la projection canonique). Elle induit un isomorphisme

$$K_{\mathfrak{m}}^*/(K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(b)}) \twoheadrightarrow \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/U_{\mathfrak{p}}^{(b)}.$$

Preuve

Soit $x \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$. Par densité, il existe $y \in K^*$ tel que $x \equiv y \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^b}$. Le théorème d'approximation débile (Théorème (0.3)) nous assure l'existence d'un élément $z \in K^*$ tel que $z \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ et $z \equiv y \pmod{\mathfrak{p}^b}$. La deuxième équivalence veut dire que $z \in K_{\mathfrak{m}}^*$ et le deux autres veulent dire que la classe de z modulo $U_{\mathfrak{p}}^{(b)}$ est la même que la classe de x modulo $U_{\mathfrak{p}}^{(b)}$, ce qui montre la surjectivité. Enfin, le noyau de cet homomorphisme est évidemment $K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(b)}$. \neq

Définition (11.6)

Soit K un corps de nombres, \mathfrak{p} une place non-complexe et $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$ un K -module \mathfrak{p} -admissible ($\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$). Supposons que $b \geq 0$ est tel que $K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(b)} \subset \ker(\Theta(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m}))$, alors on définit $\theta_{\mathfrak{p}}(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m}, b) : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \rightarrow Z(\mathfrak{p})$, l'homomorphisme composé

$$\theta_{\mathfrak{p}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/U_{\mathfrak{p}}^{(b)} \xrightarrow{\simeq} K_{\mathfrak{m}}^*/(K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(b)}) \xrightarrow{\overline{\Theta}} Z(\mathfrak{p})$$

où $\overline{\Theta} = \overline{\Theta}(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m})$ est défini par $\Theta(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m})$.

Si \mathfrak{p} est une place complexe, on définit $\theta_{\mathfrak{p}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \rightarrow G$ l'homomorphisme trivial.

Remarques

a) On vérifie facilement que

$$K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(b)} = \begin{cases} K_{\mathfrak{p}^b \cdot \mathfrak{m}}^* & \text{si } b > 0 \\ K_{\mathfrak{m}}^*(\mathfrak{p}) & \text{si } b = 0 \text{ et } \mathfrak{p} \text{ finie} \\ K_{\mathfrak{m}}^* & \text{si } b = 0 \text{ et } \mathfrak{p} \text{ infinie} \end{cases}$$

où $K_{\mathfrak{m}}^*(\mathfrak{p}) = \{x \in K_{\mathfrak{m}}^* \mid v_{\mathfrak{p}}(x) = 0\}$.

b) Dans la définition précédente, si $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$, on peut prendre $b = a$, car $K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(a)} = K_{\mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}}^* = K_{\mathfrak{n}}^*$ est dans le noyau de Θ (cf. Théorème (7.2) et $j(\iota(K_{\mathfrak{n}}^*)) = P_{\mathfrak{n}}$).

c) Les anglophones appellent l'applications $\theta_{\mathfrak{p}}$ le “norm-residue symbol”.

Proposition (11.7)

Sous les mêmes hypothèses que pour la définition précédente, alors $\theta_{\mathfrak{p}}(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m}, b)$ est indépendant du choix du K -module \mathfrak{p} -admissible $\mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$ et de l'entier $b \geq 0$ tel que $K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(b)} \subset \ker(\Theta(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m}))$.

Preuve

D'abord, si \mathfrak{n} est fixé, Θ aussi et $\theta_{\mathfrak{p}}$ est indépendant du choix de b . En effet, supposons que $U_{\mathfrak{p}}^{(b')} \cap K_{\mathfrak{m}}^* \subset \ker(\Theta)$. Sans limiter la généralité, on peut supposer que $b < b'$ et on a clairement le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/U_{\mathfrak{p}}^{(b)} & \xrightarrow{\simeq} & K_{\mathfrak{m}}^*/(K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(b)}) & \xrightarrow{\quad} & \overline{\Theta}_b \\
 & \nearrow \text{nat.} & \uparrow \text{nat.} & & \uparrow \text{nat.} & \searrow & \\
 \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* & & & & & & Z(\mathfrak{p}) \\
 & \searrow \text{nat.} & \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/U_{\mathfrak{p}}^{(b')} & \xrightarrow{\simeq} & K_{\mathfrak{m}}^*/(K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(b')}) & \xrightarrow{\quad} & \overline{\Theta}_{b'}
 \end{array}$$

Soit maintenant $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{n}' = \mathfrak{p}^{a'} \cdot \mathfrak{m}'$ deux K -modules \mathfrak{p} -admissibles tels que $\mathfrak{n}|\mathfrak{n}'$. Donc $\mathfrak{m}|\mathfrak{m}'$ et $a \leq a'$, et on peut prendre $b = a$ et $b' = a'$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 K_{\mathfrak{n}}^* & \xrightarrow{\quad} & K_{\mathfrak{m}}^* & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & I_K(\mathfrak{m}) & \xrightarrow{j_{\mathfrak{n}}} & I_K(\mathfrak{n}) \\
 \uparrow \text{incl.} & & \uparrow \text{incl.} & & \uparrow \text{incl.} & & \uparrow \text{incl.} \\
 K_{\mathfrak{n}'}^* & \xrightarrow{\quad} & K_{\mathfrak{m}'}^* & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & I_K(\mathfrak{m}') & \xrightarrow{j_{\mathfrak{n}'}} & I_K(\mathfrak{n}')
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \Phi_{L/K} \\
 \searrow \\
 G \\
 \nearrow \\
 \Phi_{L/K}
 \end{array}$$

Donc, en passant aux quotients, un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 K_{\mathfrak{m}}^*/K_{\mathfrak{n}}^* & \xrightarrow{\quad} & \overline{\Theta}(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}^a) \\
 \uparrow \text{nat.} & & \searrow \\
 & & Z(\mathfrak{p}) \\
 & \nearrow & \\
 K_{\mathfrak{m}'}^*/K_{\mathfrak{n}'}^* & \xrightarrow{\quad} & \overline{\Theta}(\mathfrak{m}', \mathfrak{p}^{a'})
 \end{array}$$

Que l'on complète en un diagramme toujours commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/U_{\mathfrak{p}}^{(a)} & \xrightarrow{\simeq} & K_{\mathfrak{m}}^*/K_{\mathfrak{n}}^* & \xrightarrow{\quad} & \overline{\Theta}(\mathfrak{m}, \mathfrak{p}^a) \\
 & \nearrow \text{nat.} & \uparrow \text{nat.} & & & \searrow & \\
 \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* & & & & & & Z(\mathfrak{p}) \\
 & \searrow \text{nat.} & \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/U_{\mathfrak{p}}^{(a')} & \xrightarrow{\simeq} & K_{\mathfrak{m}'}^*/K_{\mathfrak{n}'}^* & \xrightarrow{\quad} & \overline{\Theta}(\mathfrak{m}', \mathfrak{p}^{a'})
 \end{array}$$

D'où l'indépendance en le K -module \mathfrak{n} (le cas de deux K -modules généraux \mathfrak{n} et \mathfrak{n}' se réduit au cas précédent en passant par l'intermédiaire du ppcm de \mathfrak{n} et \mathfrak{n}'). ≠

Remarque

Pour calculer $\theta_{\mathfrak{p}}$ lorsque \mathfrak{p} est un idéal premier, on peut donc procéder comme suit : on choisit d'abord un K -module \mathfrak{p} -admissible $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$) et un $b \in \mathbb{N}$ tel que $K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(b)} \subset \ker(\Theta(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m}))$ (par exemple $b = a$) et si $x \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$, on choisit (par densité et grâce au théorème d'approximation débile,

Théorème (0.3)), $y \in K^*$ tel que $y \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}}$ et $y \equiv x \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^b}$, et alors,

$$\theta_{\mathfrak{p}}(x) = \Phi_{L/K}(j_{\mathfrak{n}}((y))) = \Phi_{L/K}\left((y) \cdot \mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(y)}\right),$$

où, $\Phi_{L/K} = \Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{n})}$. En particulier,

Proposition (11.8)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Si \mathfrak{p} est un idéal premier non-ramifié dans L , alors

$$\theta_{\mathfrak{p}}(x) = \text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}.$$

Preuve

Puisque la Proposition (11.7) est vraie, on peut prendre (en vertu du théorème de réciprocité d'Artin, Théorème (7.14)) pour \mathfrak{m} un K -module admissible tel que $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$, et choisir $\mathfrak{n} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{m}$ et $a = b = 1$. Soit $x \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. Comme dans la remarque précédente, choisissons $y \in K_{\mathfrak{m}}^*$ tel que $y \equiv x \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}}$. Alors, l'idéal $(y) \in P_{\mathfrak{m}}$, et puisque \mathfrak{m} est admissible, $\Phi_{L/K}((y)) = 1$. Ainsi, en vertu de la remarque précédente,

$$\theta_{\mathfrak{p}}(x) = \Phi_{L/K}\left((y) \cdot \mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(y)}\right) = \Phi_{L/K}(\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}.$$

≠

Proposition (11.9)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$, $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$ un K -module \mathfrak{p} -admissible et $c \geq 0$ un nombre entier. Considérons $\Theta = \Theta(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m})$ et $\theta_{\mathfrak{p}}$. Considérons enfin $\mathfrak{f}(L/K)$, le conducteur de L/K (cf. Application-Définition (8.6) pour la définition). Alors les trois conditions sont équivalentes :

- i) $U_{\mathfrak{p}}^{(c)} \subset \ker(\theta_{\mathfrak{p}})$,
- ii) $U_{\mathfrak{p}}^{(c)} \cap K_{\mathfrak{m}}^* \subset \ker(\Theta)$,
- iii) $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f}(L/K)) \leq c$.

preuve

La preuve de ii) \Rightarrow i) est évident, car on peut alors définir $\theta_{\mathfrak{p}}$ avec $b = c$ dans ce cas.

Pour prouver i) \Rightarrow ii), on peut supposer $c < a$, car si $c \geq a$, i) et ii) sont tous les deux vrais. Par $\theta_{\mathfrak{p}}$, $U_{\mathfrak{p}}^{(c)}$ est envoyé successivement sur (on utilise $b = a$ pour définir $\theta_{\mathfrak{p}}$) $U_{\mathfrak{p}}^{(c)}/U_{\mathfrak{p}}^{(a)} \subset \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(a)}$ puis sur $(U_{\mathfrak{p}}^{(c)} \cap K_{\mathfrak{m}}^*)/(U_{\mathfrak{p}}^{(a)} \cap K_{\mathfrak{m}}^*) \subset K_{\mathfrak{m}}^*/(U_{\mathfrak{p}}^{(a)} \cap K_{\mathfrak{m}}^*)$ et enfin sur $\Theta(U_{\mathfrak{p}}^{(c)} \cap K_{\mathfrak{m}}^*)$ qui doit être 1 par hypothèse. On en déduit bien que $U_{\mathfrak{p}}^{(c)} \cap K_{\mathfrak{m}}^* \subset \ker(\Theta)$.

Il reste donc à voir que ii) \iff iii) .

- a) Supposons $c \geq 1$. Si \mathfrak{p} est une place finie, alors $U_{\mathfrak{p}}^{(c)} \cap K_{\mathfrak{m}}^* = K_{\mathfrak{p}^c \cdot \mathfrak{m}}$ (cf. Remarque suivant la Définition (11.6)) et $\iota(K_{\mathfrak{p}^c \cdot \mathfrak{m}}) = P_{\mathfrak{p}^c \cdot \mathfrak{m}} \subset I_K(\mathfrak{n})$. Donc

$$\begin{aligned} \text{ii)} &\iff P_{\mathfrak{p}^c \cdot \mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{n})}) \\ &\iff P_{\mathfrak{p}^c \cdot \mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{p}^c \cdot \mathfrak{m})}) \text{ car } I_K(\mathfrak{n}) = I_K(\mathfrak{p}^c \cdot \mathfrak{m}) \\ &\iff \mathfrak{p}^c \cdot \mathfrak{m} \text{ est admissible (car } \mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m} \text{ l'est et donc est div. par les places qui ram.)} \\ &\iff c \geq v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f}(L/K)). \end{aligned}$$

Pour la dernière équivalence, \Rightarrow est clair et \Leftarrow vient du fait que $\mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$ est admissible, donc est un multiple de $\mathfrak{f}(L/K)$. Si \mathfrak{p} est infini réel, alors dans notre cas, $a = 1 = c$ et *ii*) et *iii*) sont vraies.

- b) Supposons $c = 0$. Si \mathfrak{p} est finie, alors ici $U_{\mathfrak{p}}^{(c)} \cap K_{\mathfrak{m}}^* = U_{\mathfrak{p}} \cap K_{\mathfrak{m}}^* = K_{\mathfrak{m}}^*(\mathfrak{p}) = \{x \in K_{\mathfrak{m}}^* \mid x \text{ est premier à } \mathfrak{p}\}$. Et on a clairement $\iota(U_{\mathfrak{p}} \cap K_{\mathfrak{m}}^*) = P_{\mathfrak{m}} \cap I_K(\mathfrak{n})$. Donc la condition *ii*) est équivalente à

$$P_{\mathfrak{n}} \subset P_{\mathfrak{m}} \cap I_K(\mathfrak{n}) \subset \ker(\Phi_{L/K}|I_K(\mathfrak{n})) \subset I_K(\mathfrak{n}) \quad (*)$$

Considérons les deux classes de groupes de congruences : $\mathbb{H}' = \{H'(\overline{\mathfrak{m}}) \mid \mathfrak{f}'|\overline{\mathfrak{m}}\}$, la classe d'équivalence de $H'(\mathfrak{n}) := P_{\mathfrak{m}} \cap I_K(\mathfrak{n})$ et de $H'(\mathfrak{m}) = P_{\mathfrak{m}}$, et la classe $\mathbb{H}(L/K)$. La condition *ii*) est alors équivalente à dire (par $(*)$) que $\mathbb{H}' \subset \mathbb{H}(L/K)$ qui est équivalente à $\mathfrak{f}(L/K)|\mathfrak{f}'$ (cf. Corollaire-Définition (8.5)). Or, $\mathfrak{f}'|\mathfrak{m}$, donc (petit raisonnement facile) *ii*) est équivalent au fait que $\mathfrak{f}(L/K)|\mathfrak{m}$ et donc que $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f}(L/K)) = 0$. Enfin, supposons que $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(K)$. Dans ce cas, *i*) veut dire que $\ker(\theta_{\mathfrak{p}}) = U_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}^* = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$, donc $\theta_{\mathfrak{p}}$ est l'application triviale. En suivant à la trace les applications successives qui définissent $\theta_{\mathfrak{p}}$, cela veut dire que $P_{\mathfrak{m}} = j(\iota(K_{\mathfrak{m}}^*)) \subset \ker(\Phi_{L/K}|I_K(\mathfrak{n})) = \ker(\Phi_{L/K}|I_K(\mathfrak{m}))$, ce qui veut dire que \mathfrak{m} est admissible, donc que $\mathfrak{f}(L/K)|\mathfrak{m}$ et finalement que $v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{f}(L/K)) = 0$. \neq

Proposition (11.10)(Premier lemme de naturalité)

Soit E/K une extension abélienne de corps de nombres, L un sous-corps intermédiaire et $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$. Alors on a :

$$\theta_{\mathfrak{p}}(L/K) = R \circ \theta_{\mathfrak{p}}(E/K),$$

où $R : \text{Gal}(E/K) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ est la restriction habituelle à L .

Preuve

Si \mathfrak{p} est complexe, c'est évident, puisque $\theta_{\mathfrak{p}}$ est l'homomorphisme trivial.

Supposons \mathfrak{p} non complexe et soit $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$ un K -module \mathfrak{p} -admissible pour E/K et L/K . Alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & & \Phi_{E/K} & \text{Gal}(E/K) \\ & & & \nearrow & \downarrow R \\ K_{\mathfrak{m}}^* & \xrightarrow{\iota} & I_K(\mathfrak{m}) & \xrightarrow{j_{\mathfrak{n}}} & I_K(\mathfrak{n}) \\ & & & \searrow & \downarrow \Phi_{L/K} \\ & & & & \text{Gal}(L/K) \end{array}$$

commute, donnant la relation $\Theta(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m}) = R \circ \Theta(E/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m})$. Puis, en quotientant par $K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(a)}$, $\overline{\Theta}(L/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m}) = R \circ \overline{\Theta}(E/K, \mathfrak{p}^a, \mathfrak{m})$. Et, composant avec $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \longrightarrow \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/U_{\mathfrak{p}}^{(a)} \xrightarrow{\simeq} K_{\mathfrak{m}}^*/(K_{\mathfrak{m}}^* \cap U_{\mathfrak{p}}^{(a)})$, on trouve le résultat. \neq

Proposition (11.11)(Deuxième lemme de naturalité)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres (de groupe G) et E/K une extension quelconque de corps de nombres. La théorie de Galois montre que l'extension EL/E est aussi abélienne et que $H := \text{Gal}(EL/E)$ est identifiable à un sous-groupe de G via la restriction à L . Notons $R : H \rightarrow G$ cette

restriction. Soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ et $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}(E)$ telle que $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. Alors on a :

$$\theta_{\mathfrak{p}}(L/K) \circ N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}} = R \circ \theta_{\mathfrak{P}}(LE/E).$$

Preuve

Si \mathfrak{p} est complexe, alors \mathfrak{P} aussi et donc notre égalité est vraie puisque $\theta_{\mathfrak{p}}$ et $\theta_{\mathfrak{P}}$ sont triviaux.

Si \mathfrak{p} est réelle et \mathfrak{P} complexe (\mathfrak{p} ramifie), le membre de droite de l'égalité est trivial. Pour l'autre membre, l'image de $N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}$ ($= N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}$) est l'ensemble $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}+}^* = \mathbb{R}_{+}^*$. D'autre part, ici, $\theta_{\mathfrak{p}}$ est un homomorphisme qui part de $\mathbb{K}^* = \mathbb{R}^*$ pour arriver dans $Z(\mathfrak{P}'/\mathfrak{p})$ (où \mathfrak{P}' est n'importe quel idéal premier de L au-dessus de \mathfrak{p}) qui est ici d'ordre 1 ou 2. Or, dans tout homomorphisme de ce type, \mathbb{R}_{+}^* est dans le noyau (car tout élément est un carré). Donc l'égalité à prouver est vraie dans ce cas.

Si \mathfrak{p} et \mathfrak{P} sont réelles, alors \mathfrak{p} et \mathfrak{P} ramifient ou non simultanément dans L respectivement LE . En effet, si \mathfrak{p} ramifie dans L alors $\sigma_{\mathfrak{P}'}(L) \not\subset \mathbb{R}$ pour tout $\mathfrak{P}' \in \mathbb{P}_{\infty}(L)$, $\mathfrak{P}'|\mathfrak{p}$ et donc si $\mathfrak{P}'' \in \mathbb{P}_{\infty}(LE)$, $\mathfrak{P}''|\mathfrak{P}$, on a $\sigma_{\mathfrak{P}''}(LE) \not\subset \mathbb{R}$ car déjà $R \circ \sigma_{\mathfrak{P}''}(L) \not\subset \mathbb{R}$. Réciproquement, si \mathfrak{P} ramifie dans LE , soit $\mathfrak{P}'' \in \mathbb{P}_{\infty}(LE)$, $\mathfrak{P}''|\mathfrak{P}$ et posons $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}'' \cap L$. On a donc $\sigma_{\mathfrak{P}''}(LE) \not\subset \mathbb{R}$. Supposons par l'absurde que $\sigma_{\mathfrak{P}'}(L) \subset \mathbb{R}$, alors puisque $\sigma_{\mathfrak{P}}(E) \subset \mathbb{R}$, on a aussi $\sigma_{\mathfrak{P}''}(LE) \subset \mathbb{R}$, car $LE = L(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, avec des $\alpha_i \in E$ pour tout i ; c'est une contradiction. Donc $\sigma_{\mathfrak{P}'}(L) \not\subset \mathbb{R}$ ce qui veut dire que \mathfrak{p} ramifie.

Supposons donc que \mathfrak{p} et \mathfrak{P} soient réelles et ne ramifient pas. Alors l'image de $\theta_{\mathfrak{p}}$ et de $\theta_{\mathfrak{P}}$ est triviale (car dans ce cas, $Z(\mathfrak{p}) = Z(\mathfrak{P}) = \{1\}$). Donc, l'égalité cherchée est vraie. Maintenant, s'ils ramifient les deux, en prenant $b = a = 1$, $\theta_{\mathfrak{p}}$ et $\theta_{\mathfrak{P}}$ induisent des isomorphismes

$$\mathbb{R}/\mathbb{R}_{+}^* \longrightarrow \begin{cases} Z(L/\mathfrak{p}) \simeq \{\pm 1\} \\ Z(LE/\mathfrak{P}) \simeq \{\pm 1\} \end{cases}$$

Or, dans notre cas, $N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}} = N_{\mathbb{R}/\mathbb{R}} = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ et l'homomorphisme de restriction R est injectif et envoie en toute généralité $Z(LE/\mathfrak{P})$ dans $Z(L/\mathfrak{p})$. Cela montre donc l'égalité dans ce cas.

Supposons \mathfrak{p} et \mathfrak{P} finies. Pour calculer $\theta_{\mathfrak{p}}$, on choisit (comme on l'a vu à la remarque précédent la Proposition (11.8)) un K -module \mathfrak{p} -admissible $\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^a \cdot \mathfrak{m}$ ($a > 0$, $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$) et $b = a$. Il est évident (Lemme (7.5)) que $\tilde{\mathfrak{n}}$, le E -module extension à E de \mathfrak{n} , est \mathfrak{P} -admissible. En fait, $\tilde{\mathfrak{n}} = \mathfrak{P}^{ae} \cdot \mathfrak{m}'$ où $e = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$, $\mathfrak{P} \nmid \mathfrak{m}'$ et, clairement, $\mathfrak{m}' = \tilde{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{P}_2^{ae_2} \dots \mathfrak{P}_r^{ae_r}$, où $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_r$ sont les idéaux premiers de E au-dessus de \mathfrak{p} , et $e_i = e(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p})$. Souvenons-nous que $N_{E/K}(E_{\mathfrak{m}}^*) \subset K_{\mathfrak{m}}^*$ (Lemme (5.2) b)), donc *a fortiori*, $N_{E/K}(E_{\mathfrak{m}'}^*) \subset K_{\mathfrak{m}}^*$. On a aussi la relation $N_{E/K}(x \cdot O_E) = N_{E/K}(x) \cdot O_K$ (voir en page 3). Enfin, ce qu'on vient de voir, une vérification facile et le Théorème (0.6) montre que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} E_{\mathfrak{m}'}^* & \xrightarrow{\iota} & I_E(\mathfrak{m}') & \xrightarrow{j_{\tilde{\mathfrak{n}}}} & I_E(\tilde{\mathfrak{n}}) & \xrightarrow{\Phi_{LE/E}} & H \\ \downarrow N_{E/K} & & \downarrow N_{E/K} & & \downarrow N_{E/K} & & \downarrow R \\ K_{\mathfrak{m}}^* & \xrightarrow{\iota} & I_K(\mathfrak{n}) & \xrightarrow{j_{\mathfrak{n}}} & I_K(\mathfrak{n}) & \xrightarrow{\Phi_{L/K}} & G \end{array}$$

Soit $x \in E_{\mathfrak{p}}^*$. On choisit, pour calculer $\theta_{\mathfrak{p}}$, $y \in E_{\mathfrak{m}'}^*$, tel que $x \equiv y \pmod{\mathfrak{P}^{ae}}$. On a donc

$$R \circ \theta_{\mathfrak{p}}(x) = R \circ \Phi_{LE/E}((y)) \cdot \mathfrak{P}^{-v_{\mathfrak{P}}(y)} \stackrel{\text{diag. prec.}}{=} \Phi_{L/K}((N_{E/K}(y))) \cdot \mathfrak{p}^{-v_{\mathfrak{p}}(N_{E/K}(y))}.$$

Donc, en vertu de la remarque précédent la Proposition (11.8), si on montre que

$$N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(x) \equiv N_{E/K}(y) \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^a},$$

on montre la proposition. Par une preuve similaire à la preuve du Lemme (5.2), on voit que $N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(1 + \widehat{\mathfrak{P}}^{ae}) \subset 1 + \widehat{\mathfrak{p}}^a$. Cela montre que $N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(x) \equiv N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(y) \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^a}$. De plus, par définition de y et de \mathfrak{m}' , si $i = 2, \dots, r$, on a $y \equiv 1 \pmod{\widehat{\mathfrak{P}}_i^{ae_i}}$. Ainsi, pour la même raison que tout à l'heure, on a $N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_i}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(y) \equiv N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_i}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(1) = 1 \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^a}$. Enfin, il est bien connu (cf. [Fr-Tay, III, 1.10, p. 110]) que $N_{E/K}(y) = \prod_{i=1}^r N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_i}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(y)$. En résumé, on a :

$$N_{E/K}(y) = \prod_{i=1}^r N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_i}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(y) \equiv N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(y) \equiv N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(x) \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^a}.$$

#

Corollaire (11.12)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ et $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}(L)$ telle que $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. Alors, $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*) \subset \ker(\theta_{\mathfrak{p}})$.

Preuve

En choisissant $E = L$ dans le théorème précédent, on voit que $\theta_{\mathfrak{p}}(L/K) \circ N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}} = R \circ \theta_{\mathfrak{P}}(L/L) = \text{Id}_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}}$. Cela prouve le corollaire. #

Proposition (11.13)(Troisième lemme de naturalité)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Soit $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ et $\sigma : L \rightarrow \mathbb{C}$ un plongement. Alors, il est clair que σ se prolonge en un homomorphisme qu'on note encore $\sigma : L_{\mathfrak{P}} \rightarrow \mathbb{C}$ pour tout $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}(L)$. Notons $K^{\sigma}, L^{\sigma}, \mathfrak{p}^{\sigma}$ pour $\sigma(K), \sigma(L)$ respectivement $\sigma(\mathfrak{p})$. Alors L^{σ}/K^{σ} est clairement aussi une extension abélienne. Alors, pour tout $y = \sigma(x) \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}^{\sigma}}^{\sigma}$, on a

$$\sigma \circ \theta_{\mathfrak{p}}(L/K)(x) \circ \sigma^{-1} = \theta_{\mathfrak{p}^{\sigma}}(L^{\sigma}/K^{\sigma})(y).$$

Preuve

C'est une vérification évidente sachant que $Z(\mathfrak{p}^{\sigma}) = \sigma Z(\mathfrak{p})\sigma^{-1}$ et que σ transporte tout, faisant commuter tout diagramme utile pour la preuve. #

Théorème (11.14)

Sous les mêmes hypothèses : si L/K est une extension abélienne de corps de nombres, \mathfrak{p} une place non complexe de K et \mathfrak{P} une place de L au-dessus de \mathfrak{p} , alors on a

$$\ker(\theta_{\mathfrak{p}}) = N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*).$$

Preuve

On a montré que $\ker(\theta_{\mathfrak{p}}) \supset N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)$ au Corollaire (11.12). Montrons donc l'inclusion inverse : la surjectivité de $\theta_{\mathfrak{p}}$ (Théorème (11.3)), l'inclusion que nous venons de prouver et [Fr-Tay, 1.14+4.2, pp. 111 et 143]) montrent que

$$[\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}] = |Z(\mathfrak{p})| = [\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : \ker(\theta_{\mathfrak{p}})] \leq [\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*)].$$

Ainsi, pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de prouver que

$$[\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*)] \leq [\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}]. \quad (***)$$

Si \mathfrak{p} est infinie, on se souvient que $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{L}_{\mathfrak{P}} = \mathbb{R}$ si \mathfrak{p} ne ramifie pas dans L , et dans ce cas, $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}$ est l'identité et donc les indices cherchés valent 1; et si \mathfrak{p} ramifie dans L , alors dans ce cas, $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} = \mathbb{C}$ et $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{R}_+^*$ et donc les indices cherchés valent 2, car $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}$ est la norme complexe.

Supposons \mathfrak{p} finie. Prouvons ce résultat par récurrence sur le nombre de facteurs premiers de $[L : K]$. Si ce nombre est 1, alors l'extension L/K est cyclique (un groupe abélien d'ordre premier est cyclique...). Et dans ce cas là, on a déjà prouvé que $[\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}] = [\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*)]$ (Proposition (5.17)). Supposons maintenant que le nombre de facteurs premiers de $[L : K]$ soit strictement supérieur à 1 et que le théorème est prouvé pour toute extension d'indice plus petit. Choisissons une extension intermédiaire $K \subsetneq E \subsetneq L$, et on pose $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P} \cap E$. On a $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \subset \mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0} \subset \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$. Si on pose $N_1 = N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0}}$ et $N_2 = N_{\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}$, alors bien sûr, $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}} = N_2 \circ N_1$. D'autre part, le lemme technique (Lemme (6.1)) montre facilement que $[N_2(\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0}^*) : N_2(N_1(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*))] \leq [\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0}^* : N_1(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*)]$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} [\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*)] &= [\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_2(\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0}^*)] \cdot [N_2(\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0}^*) : N_2(N_1(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*))] \\ &\stackrel{\text{hyp. de rec+rem.}}{\leq} [\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}] \cdot [\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0}^* : N_1(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*)] \stackrel{\text{hyp. de rec}}{\leq} [\mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}] \cdot [\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{E}_{\mathfrak{P}_0}]. \end{aligned}$$

Cela montre la relation (***) et donc le théorème. ##

Corollaire (11.15)

Sous les mêmes hypothèses, i.e. si L/K est une extension abélienne de corps de nombres, \mathfrak{p} une place non complexe de K et $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ est une place de L au-dessus de \mathfrak{p} , alors on a :

$$[\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*)] = [\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}].$$

De plus, pour $c \geq 0$, on a

$$U_{\mathfrak{p}}^{(c)} \subset N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*) \iff c \geq v_{\mathfrak{p}}(f(L/K)).$$

Preuve

L'égalité $[\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*)] = [\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}]$ à été montré dans la preuve du théorème précédent. La second affirmation est un corollaire immédiat du théorème précédent combiné avec la Proposition (11.9). ##

Lemme (11.16)

Sous les mêmes hypothèses : si L/K est une extension abélienne de corps de nombres, \mathfrak{p} une place non complexe de K et \mathfrak{P} une place de L au-dessus de \mathfrak{p} , alors on a

$$U_{\mathfrak{p}} = N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}}) \iff U_{\mathfrak{p}} \subset N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*) \iff \mathfrak{p} \text{ est non ramifiée dans } L$$

Preuve

Si \mathfrak{p} est une place infinie, c'est une vérification : si \mathfrak{p} est ramifié, $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}}^{(0)}) = N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{C}^*) = \mathbb{R}_+^* \subsetneq \mathbb{R}^* = U_{\mathfrak{p}}^{(0)}$; et si \mathfrak{p} est non ramifié, $N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}}^{(0)}) = N_{\mathbb{R}/\mathbb{R}}(\mathbb{R}^*) = \mathbb{R}^* = U_{\mathfrak{p}}^{(0)}$.

Supposons \mathfrak{p} finie. La partie “ \Rightarrow ” de la première équivalence est évidente. La partie “ \Leftarrow ” aussi : soit π (resp. π') une uniformisante de $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$ (resp. $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$). On sait que $N_{\mathfrak{p}}(\pi) = u \cdot \pi'^f$, où $f = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$ et $u \in U_{\mathfrak{p}}$. Donc dire que $U_{\mathfrak{p}} \subset N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(L_{\mathfrak{P}}^*)$, implique puisque $L_{\mathfrak{P}}^* = \langle \pi \rangle \times U_{\mathfrak{P}}$ et $K_{\mathfrak{p}}^* = \langle \pi' \rangle \times U_{\mathfrak{p}}$, que $U_{\mathfrak{p}} \subset N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}})$, mais on a toujours $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}}) \subset U_{\mathfrak{p}}$ (car la norme d'un entier est un entier) et on trouve bien $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}}) = U_{\mathfrak{p}}$.

Montrons la seconde équivalence : Supposons que $U_{\mathfrak{p}} \subset N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)$, on a vu que c'est équivalent au fait que $U_{\mathfrak{p}} = N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}})$. Ainsi, toujours puisque $N_{\mathfrak{p}}(\pi) = u \cdot \pi'^f$, on a que π'^f est une norme (puisque u en est une). Cela prouve que $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*) = \langle \pi'^f \rangle \times U_{\mathfrak{p}}$. Ainsi $[\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)] = f$. Or, on a montré au Corollaire (11.15) que $[\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)] = [\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}] = f \cdot e$, où $e = e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Donc $e = 1$, ce qui montre que \mathfrak{p} n'est pas ramifié dans L . Inversement, si \mathfrak{p} est non ramifiée, le Lemme (8.8) nous montre que $\mathfrak{p} \nmid f(L/K)$, donc $v_{\mathfrak{p}}(f(L/K)) = 0$ ce qui implique en vertu du Corollaire (11.15) que $U_{\mathfrak{p}}^{(0)} = U_{\mathfrak{p}} \subset N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*)$. Le lemme est alors démontré. $\#$

Voilà enfin un des théorèmes que nous visions depuis un moment :

Théorème (11.17)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres. Alors les places ramifiées divisent le conducteur. Plus précisément, \mathfrak{p} ramifie dans $L \iff \mathfrak{p} \mid f(L/K)$. Cela implique en vertu du Lemme (8.7) que $f(L/K)$ est admissible.

Preuve

Soit \mathfrak{p} une place de K non complexe. Posons c l'exposant de \mathfrak{p} dans la décomposition de f . Alors on a la série d'équivalence :

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \nmid f &\iff c = 0 \xLeftrightarrow{\text{Prop. (11.9)}} U_{\mathfrak{p}} \subset \ker(\theta_{\mathfrak{p}}) \\ &\xLeftrightarrow{\text{Thm. (11.14)}} U_{\mathfrak{p}} \subset N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}^*) \\ &\xLeftrightarrow{\text{Lemme (11.16)}} \mathfrak{p} \text{ est non ramifiée dans } L. \end{aligned}$$

$\#$

Corollaire (11.18)(construction et existence du corps de Hilbert)

Soit K un corps de nombres. Alors il existe un (unique) corps de nombres $H \supset K$ (appelé corps de Hilbert de K) possédant les propriétés suivantes :

- L'extension H/K est abélienne (de groupe disons G).
- Aucune place de K ne ramifie dans H .
- L'application d'Artin $\Phi_{H/K} : I_K \rightarrow G$ est de noyau P , l'ensemble des idéaux fractionnaires principaux de K ; ainsi, puisque $\Phi_{H/K}$ est surjective (Théorème (2.16)), cela implique que G est isomorphe au groupe des classes $\mathcal{CL}_K = I_K/P$.

En outre, l'extension H/K contient toute extension de K abélienne non ramifiée (i.e. satisfaisant les propriétés a) et b) de la même clôture algébrique.

Preuve

Considérons le K -module $O_K (= (O_K, \emptyset))$ et la classe d'équivalence de sous-groupes de congruences

$$\mathbb{H} = \{P(\mathfrak{m}) = P \cap I_K(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m} \text{ est un } K\text{-module}\}.$$

Il est évident que \mathbb{H} est bel et bien une classe d'équivalence et que le conducteur de cette classe est $\mathfrak{f} = O_K$ et le groupe de congruence associé à \mathfrak{f} est P . Par le théorème d'existence du corps de classe (cf. Théorème (10.1)), il existe une extension abélienne H/K telle que $\mathbb{H} = \mathbb{H}(H/K)$. Le théorème précédent nous montre que O_K est admissible, donc $\text{Gal}(H/K) \simeq I_K/P$, d'où la partie c). Puisque $\mathfrak{f} = O_K$, le théorème précédent nous dit que l'extension H/K est non ramifiée, d'où la partie b). Pour la dernière affirmation, soit L/K une extension abélienne non ramifiée. A nouveau, grâce au théorème précédent, le conducteur $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}(L/K)$ de cette extension vaut $O_K = \mathfrak{f}(H/K)$. Soit $H(\mathfrak{f}, L/K) \in \mathbb{H}(L/K)$, le sous-groupe de congruence pour $\mathfrak{f}(L/K)$. On a par définition $P_{\mathfrak{f}} \subset H(\mathfrak{f}, L/K)$. Or, puisque $\mathfrak{f} = O_K$, on a $P_{\mathfrak{f}} = P(\mathfrak{f}) = H(\mathfrak{f}, H/K)$. Cela montre que $H(\mathfrak{f}, H/K) \subset H(\mathfrak{f}, L/K)$ et donc, $\mathbb{H}(H/K) \subset \mathbb{H}(L/K)$ et donc $L \subset H$ en vertu de la Proposition (8.9). Ce qui achève la preuve de ce corollaire. \neq

Remarque

Le corps de Hilbert a encore une propriété remarquable : si K est un corps de nombres, alors tout idéal fractionnaire de K devient principal dans le corps de Hilbert de K . La preuve de ce résultat est assez longue. Le chapitre suivant est consacré à la preuve de ce résultat

Chapitre 12 :

Capitulation des idéaux d'un corps nombres dans son corps de Hilbert

Ici, nous allons montrer que tout idéal d'un corps de nombres devient principal vu dans le corps de Hilbert, on dit qu'il *capitule*. Evidemment, dans la vraie vie, il vaut mieux que les idéaux ne capitulent pas, mais en mathématique, cela simplifie bien les choses. Avant de s'attaquer de front au problème, nous devons faire une petite incursion dans la théorie des groupe pour définir un homomorphisme dit de "transfert". Nous montrerons ensuite que cet homomorphisme est trivial sous certaines hypothèses, puis nous utiliserons ce résultat pour résoudre notre problème. Notons que ce résultat a été prouvé par Furtwängler en 1930.

Définitions (12.1)

Soit G un groupe, $H \subset G$ un sous-groupe de G et $J \subset H$ un sous-groupe normal dans H . On suppose que $[G : H] < \infty$ et que H/J soit abélien. Une *transversale (à droite) de H dans G* est une partie $T \subset G$ telle que

$$G = \bigsqcup_{t \in T} H \cdot t. \quad (1)$$

Cette réunion est finie par hypothèse. Soit donc $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ ($n = [G : H]$) une transversale de H dans G . Soit $g \in G$. Pour chaque $i = 1, \dots, n$, il existe $h_i \in H$ et $j(i) \in \{1, \dots, n\}$ tel que $t_i \cdot g = h_i \cdot t_{j(i)}$. L'application $i \mapsto j(i)$ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, car $Tg = \{t_1 \cdot g, \dots, t_n \cdot g\}$ est aussi une transversale (il suffit de multiplier (1) par g). Alors on pose

$$\begin{aligned} \text{Ver} : G &\longrightarrow H/J \\ g &\longmapsto \prod_{i=1}^n J \cdot h_i = J \cdot \prod_{i=1}^n h_i. \end{aligned}$$

Cette application est "presque" l'homomorphisme de transfert, mais pas tout-à-fait. Néanmoins, nous allons voir qu'elle est indépendante de la transversale T et que c'est un homomorphisme de groupe.

Lemme (12.2)

Sous les mêmes hypothèses, l'application $\text{Ver} : G \rightarrow H/J$ est indépendante de T et c'est un homomorphisme de groupe.

Preuve

Soit $T' = \{t'_1, \dots, t'_s\}$ une autre transversale de H dans G . Choisissons une numérotation de t'_i telle que $H \cdot t_i = H \cdot t'_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Posons, pour ces mêmes i , $h''_i \in H$ tel que $t'_i = h''_i \cdot t_i$. Soit $g \in G$. De $t_i \cdot g_i = h_i \cdot t_{j(i)}$ suit (en multipliant par h''_i) $h''_i \cdot t_i \cdot g_i = h''_i \cdot h_i \cdot h''_{j(i)}^{-1} \cdot h''_{j(i)} \cdot t_{j(i)}$, c'est-à-dire

$$t'_i \cdot g = h'_i \cdot t'_{j(i)} \quad \text{avec } h'_i = h''_i \cdot h_i \cdot h''_{j(i)}^{-1}$$

On en déduit (en utilisant plusieurs fois que H/J est commutatif et que $i \mapsto j(i)$ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$) :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n J \cdot h'_i &= \prod_{i=1}^n J \cdot h''_i \cdot h_i \cdot h''_{j(i)}{}^{-1} = \prod_{i=1}^n J \cdot h''_i \cdot \prod_{i=1}^n J \cdot h_i \cdot \prod_{i=1}^n J \cdot h''_{j(i)}{}^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^n J \cdot h''_i \cdot \prod_{i=1}^n J \cdot h_i \cdot \prod_{i=1}^n J \cdot h''_i{}^{-1} = \prod_{i=1}^n J \cdot h''_i \cdot \prod_{i=1}^n J \cdot h_i \cdot \left(\prod_{i=1}^n J \cdot h''_i \right)^{-1} \\ &= \prod_{i=1}^n J \cdot h_i. \end{aligned}$$

Cela montre que $\text{Ver}(g)$ ne dépend pas de la transversale T .

Montrons à présent que c'est un homomorphisme de groupe : soit donc $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ une transversale et $g, h \in G$. On a comme avant $t_i \cdot g = h_i \cdot t_{j(i)}$ et $t_i h = h'_i \cdot t_{k(i)}$, pour $i = 1, \dots, n$, $h_i, h'_i \in H$, $i \mapsto j(i)$, $i \mapsto k(i)$ sont des permutations de $\{1, \dots, n\}$. On a alors $t_i \cdot g \cdot h = h_i \cdot t_{j(i)} \cdot h = h_i \cdot h'_{j(i)} t_{k(j(i))}$. Ainsi (toujours avec les mêmes propriétés de J/H , $i \mapsto j(i)$) :

$$\begin{aligned} \text{Ver}(g \cdot h) &= \prod_{i=1}^n J \cdot h_i \cdot h'_{j(i)} = \prod_{i=1}^n J \cdot h_i \cdot \prod_{i=1}^n J \cdot h'_{j(i)} \\ &= \prod_{i=1}^n J \cdot h_i \cdot \prod_{i=1}^n J \cdot h'_i = \text{Ver}(g) \cdot \text{Ver}(h) \end{aligned}$$

#

Définition (12.3)

Soit G un groupe. On rappelle que $G' = D(G : G)$ est le sous-groupe engendré par les commutateurs $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$ et G/G' , l'abélianisé de G , est le plus grand quotient abélien de G . Sous les mêmes hypothèses que le lemme précédent, mais en supposant que $J = H'$. On a que l'application $\text{Ver} : G \rightarrow H/H'$ est bien définie. Puisque H/H' est abélien et par définition de G' , il est clair que $G' \subset \ker(\text{Ver})$. Ainsi, on peut définir une application

$$V_{G \rightarrow H} : G/G' \longrightarrow H/H'$$

qu'on appelle l'homomorphisme de transfert de G sur H .

Le transfert est très utile pour montrer de jolis théorèmes sur les groupes. Nous ne pouvons pas résister à la tentation d'en citer quelques-uns, même s'il ne sont pas utiles pour la suite :

Théorème (12.4) (Théorème de Schur)

Si G est groupe tel que le centre $Z(G) = \{x \in G \mid yx = xy \ \forall y \in G\}$ est tel que $[G : Z(G)] < \infty$, alors $|G'| < \infty$.

Théorème (12.5)

Soit G un groupe fini et p le plus petit diviseur de $|G|$. Si un des p -sous-groupe de Sylow P de G est cyclique (donc tous...), alors il existe un sous-groupe normal N de G tel que $G/N \simeq P$.

Corollaire (12.6)

Si G est un sous-groupe simple fini non abélien, alors les 2-sous-groupe de Sylow de G ne sont pas cycliques.

Corollaire (12.7)

Soit G un groupe fini. Si tous les sous-groupe de Sylow de G sont cycliques, alors G est résoluble.

En revanche le théorème suivant sera le résultat crucial de ce chapitre. Il s'appelle le “théorème de l'idéal principal de la théorie des groupe” (visiblement, car l'unique corollaire connu de ce résultat est précisément le sujet de ce chapitre) :

Théorème (12.8)

Soit G un groupe. Supposons que $[G : G'] < \infty$ et que G'/G'' soit de génération finie. Alors l'homomorphisme de transfert $V_{G \rightarrow G'}$ est trivial (c'est-à-dire tout est envoyé sur 1).

La preuve de ce théorème est assez longue et nous devons tout d'abord faire ce qu'on peut appeler une “version additive du transfert”. D'abord une

Définition (12.9)

Soit G un groupe et $H \subset G$ tel que $[G : H] < \infty$. On introduit $\mathbb{Z}[G]$ (l'anneau de groupe de G , qui est l'ensemble des séries formelles $\sum_{g \in G} m_g \cdot g$, où $m_g \in \mathbb{Z}$ pour tout $g \in G$). Le noyau de l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[G] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ \sum_{g \in G} m_g \cdot g &\longmapsto \sum_{g \in G} m_g \end{aligned}$$

est un idéal, appelé *l'idéal d'augmentation*, qu'on note I_G . Remarquons que $\mathbb{Z}[H] \subset \mathbb{Z}[G]$ et que $I_H \subset I_G$. On observe aussi que $(g - 1)_{g \in G \setminus \{1\}}$ forme une \mathbb{Z} -base de I_G . En effet, si $0 = \sum_{g \neq 1} m_g(g - 1)$, on a $(\sum_{g \neq 1} m_g) \cdot 1 = \sum_{g \neq 1} m_g \cdot g$, ce qui implique que $m_g = 0$ pour tout $g \neq 1$, donc la famille est libre. De plus, si $\sum_{g \in G} m_g \in I_G$, on a $\sum_{g \in G} m_g = \sum_{g \neq 1} m_g(g - 1) + (\underbrace{\sum_{g \in G} m_g}_{=0}) \cdot 1$, donc on a la génération. On

montre de même que si $g_0 \in G$, les éléments $(g - 1) \cdot g_0$ forment aussi une base de I_G , cela vient de la relation $g - 1 = (g \cdot g_0^{-1} - 1) \cdot g_0 - (g_0^{-1} - 1) \cdot g_0$.

Notons d l'application $\mathbb{Z}[G] \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ telle que $d(g) = g - 1$. Dans $\mathbb{Z}[G]$, on peut former les idéaux I_G^2 et $I_H \cdot I_G$ (ce dernier n'étant qu'un idéal à droite, et donc un sous-groupe additif) ainsi que le sous-groupe $I_H + I_H I_G$.

Lemme (12.10)(version additive du transfert)

Soit G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice fini, ainsi que T une transversale de H dans G . Alors il existe des isomorphismes, notés \log et une application S tels que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc} G/G' & \xrightarrow{V_{G \rightarrow H}} & H/H' \\ \wr \downarrow \log & & \wr \downarrow \log \\ I_G/I_G^2 & \xrightarrow{S} & (I_H + I_H \cdot I_G)/(I_H \cdot I_G) \end{array}$$

où $S(x \bmod I_G^2) = (\sum_{t \in T} t) \cdot x \bmod I_H \cdot I_G$.

Preuve

Tout d'abord, on vérifie que $d(x \cdot y) = d(x) + d(y) + d(x) \cdot d(y)$ pour tout $x, y \in G$. Ainsi, l'application $h \mapsto d(h) \bmod I_H \cdot I_G$ est un homomorphisme de groupe de $H \rightarrow (I_H + I_H \cdot I_G)/(I_H \cdot I_G)$, le groupe de droite est bien entendu additif (donc abélien). Cela donne donc un homomorphisme

$$\log : H/H' \rightarrow (I_H + I_H \cdot I_G)/(I_H \cdot I_G).$$

Par les théorèmes d'isomorphismes $(I_H + I_H \cdot I_G)/(I_H \cdot I_G) \simeq I_H/(I_H \cap I_H \cdot I_G)$, et donc \log est surjective, car les $d(h)$ engendrent I_H . Nous allons montrer que \log est en fait un isomorphisme. Soit T une transversale de H dans G . On notera τ , l'unique élément de $T \cap H$. On affirme que les éléments $d(h) \cdot t$ avec $t \in T$ et $h \in H \setminus \{1\}$ forment une base de $I_H + I_H \cdot I_G$. En effet, on vient de voir que les $d(h) \cdot \tau$ engendrent I_H . D'autre part, $I_H \cdot I_G$ est engendré par les $(h - 1) \cdot (h' \cdot t - 1) = (h \cdot h' - 1) \cdot t - (h' - 1) \cdot t - (h - 1) = d(h \cdot h') \cdot t - d(h') \cdot t - d(h \cdot \tau^{-1}) \cdot \tau + d(\tau^{-1}) \cdot \tau$. Pour l'indépendance, si

$$0 = \sum_{\substack{t \in T \\ 1 \neq h \in H}} n_{t,h} \cdot d(h) \cdot t = \sum_{\substack{t \in T \\ 1 \neq h \in H}} n_{t,h} \cdot h \cdot t - \sum_{t \in T} \left(\sum_{1 \neq h \in H} n_{t,h} \right) \cdot t.$$

Les $h \cdot t$, $t \in T$, $1 \neq h \in H$ et les $t = 1 \cdot t$ forment exactement tous les éléments de G , donc les $n_{t,h} = 0$ pour tout t, h . C'est donc une famille libre.

On définit un homomorphisme (par l'image de la base qu'on vient de trouver)

$$\begin{aligned} I_H + I_H \cdot I_G &\longrightarrow H/H' \\ d(h) \cdot t &\longmapsto h \bmod H'. \end{aligned}$$

On vient de voir que $I_H \cdot I_G$ était engendré par les éléments $d(h) \cdot d(h' \cdot t) = d(h \cdot h') \cdot t - d(h') \cdot t - d(h \cdot \tau^{-1}) \cdot \tau + d(\tau^{-1}) \cdot \tau$ qui est envoyé sur $h \cdot \tau \cdot h^{-1} \cdot \tau^{-1} \in H'$. Donc $I_H \cdot I_G$ est dans le noyau, ce qui veut dire qu'on a l'homomorphisme

$$\exp : I_H + I_H \cdot I_G / (I_H \cdot I_G) \longrightarrow H/H'$$

caractérisé par $d(h) \cdot t \mapsto h \bmod H'$. Il est clair que \exp est l'inverse de \log : $\exp(\log(h \bmod H')) = \exp(d(h)) = \exp(d(h \cdot \tau^{-1}) \cdot \tau - d(\tau^{-1}) \cdot \tau) = h \cdot \tau^{-1} \cdot \tau = h$. Et inversement $\log(\exp(d(h) \cdot t)) = \log(h) = d(h)$,

et on observe que $d(h) \cdot t - d(h) = d(h) \cdot d(t) \in I_H \cdot I_G$, donc $d(h) \bmod I_H \cdot I_G = d(h) \cdot t \bmod I_H \cdot I_G$. On a ainsi montré que \log (et \exp) était un isomorphisme. En particulier, en appliquant cela à $H = G$, on obtient aussi l'isomorphisme :

$$\log : G/G' \xrightarrow{\sim} I_G/I_G^2.$$

Traduisons maintenant le transfert $V_{G \rightarrow H}$ en un homomorphisme

$$S : I_G/I_G^2 \longrightarrow I_H + I_H \cdot I_G / (I_H \cdot I_G).$$

Rappelons que $V_{G \rightarrow H}(g \bmod G') = \prod_{t \in T} h_t \bmod H'$, où $\forall t$, on a $t \cdot g = h_t \cdot t'$, avec $t' \in T$ et $h_t \in H$. Cela veut dire que $S(d(g) \bmod I_G^2) = \sum_{t \in T} d(h_t) \bmod I_H \cdot I_G$. Finalement, la relation $d(t) + t \cdot d(g) = d(h_t) + d(t') + d(h_t) \cdot d(t')$, donne en sommant sur tous les t ,

$$\underbrace{\sum_{t \in T} d(t)}_{= (*)} + \left(\sum_{t \in T} t \right) \cdot d(g) = \sum_{t \in T} d(h_t) + \underbrace{\sum_{t' \in T} d(t')}_{= (*)} + \underbrace{\sum_{t \in T} d(h_t) \cdot d(t')}_{\in I_H \cdot I_G}.$$

On a donc montré que $S(d(g) \bmod I_G^2) = (\sum_{t \in T} t) \cdot d(g) \bmod I_H \cdot I_G$, ce qui montre notre lemme (les $d(g)$ engendrent I_G). #

Preuve du Théorème (12.8)

En remplaçant G par G/G'' , on se ramène à prouver le théorème sous l'hypothèse que $G'' = \{1\}$, en effet, il est clair que $(G/G'')' = G'/G''$, que $(G/G'')'' = G''/G'' = \{1\}$, que $G/G' \xrightarrow{\text{thm. d'isom.}} (G/G'')/(G'/G'')$ et que le carré suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} G/G' & \xrightarrow{V_{G \rightarrow G'}} & G'/G'' \\ \wr \downarrow & & \wr \downarrow \\ (G/G'')/(G'/G'') & \xrightarrow{V_{G/G'' \rightarrow G'/G''}} & (G'/G'')/(G''/G'') \end{array}$$

car les transversales ne posent pas non plus de problème. Cela permet de supposer que G' et donc G est de génération finie. Pour la preuve, on fixe g_1, \dots, g_r un système de générateurs de G et T une transversale à droite de G' dans G . En vertu du Lemme (12.10), il s'agit donc de démontrer que pour tout $g \in G$, on a

$$\left(\sum_{t \in T} t \right) \cdot d(g) \equiv 0 \pmod{I_{G'} \cdot I_G}, \quad (*)$$

car les $d(g)$ engendrent I_G .

Remarquons d'abord la chose suivante : si $H \subset G$ est un sous-groupe normal, alors on a un isomorphisme

$$\mathbb{Z}[G/H] \simeq \mathbb{Z}[G]/(I_H \cdot \mathbb{Z}[G]). \quad (**)$$

En effet, d'abord $I_H \cdot \mathbb{Z}[G]$ est un idéal bilatère : si $h \in H$ et $g \in G$, alors si $h' \in H$ est l'élément tel que $g \cdot h = h' \cdot g$, alors $g \cdot (h - 1) = (h' - 1) \cdot g$. Ensuite, si T est une transversale à droite de H dans

G , alors $\mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z}[H] \cdot t$ et $I_H \cdot \mathbb{Z}[G] = \bigoplus_{t \in H} I_H \cdot t$, les décompositions étant compatibles (i.e. $I_H \cdot t \subset \mathbb{Z}[H] \cdot t \forall t$). De sorte que

$$\mathbb{Z}[G]/(I_H \cdot \mathbb{Z}[G]) \simeq \bigoplus_{t \in T} (\mathbb{Z}[H] \cdot t)/(I_H \cdot t) \simeq \bigoplus_{t \in T} (\mathbb{Z}[H]/I_H) \cdot \bar{t} \simeq \bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z} \cdot \bar{t}, \quad (***)$$

où \bar{g} est l'image de g dans le quotient $\mathbb{Z}[G]/(I_H \cdot \mathbb{Z}[G])$, pour tout $g \in G$; et le dernier isomorphisme vient du fait que $h - 1 \in I_H$ et donc $\bar{h} = 1$, pour tout $h \in H$. Cette dernière égalité montre que l'homomorphisme multiplicatif $G \rightarrow \mathbb{Z}[G]/(I_H \cdot \mathbb{Z}[G])$ envoie $h \cdot t \mapsto \bar{t}$; ce qui permet d'identifier G/H avec $\{\bar{t} \mid t \in T\}$ et cela fournit l'isomorphisme (d'anneau) entre $\mathbb{Z}[G/H]$ et $\bigoplus_{t \in T} \mathbb{Z} \cdot \bar{t}$ et donc entre $\mathbb{Z}[G/H]$ et $\mathbb{Z}[G]/(I_H \cdot \mathbb{Z}[G])$ en vertu de (**). Donc (**) est prouvé. Nous appliquerons ce résultat à $H = G'$. Dans ce cas-là, $\mathbb{Z}[G/G']$ (et donc $\mathbb{Z}[G]/(I_{G'} \cdot \mathbb{Z}[G])$) est un anneau commutatif (puisque G/G' est un groupe commutatif). Donc nous pourrions faire un peu d'algèbre linéaire dans ce cas-là.

Voici encore un résultat : soit $g \in G$. Si on écrit $g = x_1 \cdots x_N$, où $x_i \in \{g_1, \dots, g_n, g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}\}$, pour $i = 1, \dots, N$, alors $d(g)$ peut s'écrire

$$d(g) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot d(g_i) \quad (+)$$

pour des $y_i \in \mathbb{Z}[G]$ tels que $y_i \equiv n_i^+ - n_i^- \pmod{I_G}$, où $n_i^+ = \#$ de j tels que $x_j = g_i$ et $n_i^- = \#$ de j tels que $x_j = g_i^{-1}$. De même, $d(g) = \sum_{i=1}^n d(g_i) \cdot z_i$ pour certains $z_i \in \mathbb{Z}[G]$, mais pour nous n'aurons pas besoin de précisions supplémentaires sur les z_i . Nous prouvons (+) par récurrence sur N . Supposons $N = 1$. Si $g = g_k$ pour un $k = 1, \dots, n$, il n'y a rien à prouver. Si $g = g_k^{-1}$, on observe que $d(g_k^{-1}) = (-1 - d(g_k^{-1})) \cdot d(g_k)$ et $(-1 - d(g_k^{-1})) \equiv -1 \pmod{I_G}$. Supposons le résultat vrai pour $N - 1$ et supposons $g = x \cdot g_k$ de longueur N . Alors on a

$$\begin{aligned} d(x \cdot g_k) &= d(x) + d(g_k) + d(x) \cdot d(g_k) \stackrel{\text{H.R.}}{=} \sum_{i=1}^n y'_i \cdot d(g_i) + d(g_k) + d(x) \cdot d(g_k) \\ &= \sum_{i \neq k} y'_i \cdot d(g_i) + ((y'_k + 1) + d(x)) \cdot d(g_k). \end{aligned}$$

En posant $y_i = y'_i$ si $i \neq k$ et $y_k = y'_k + 1 + d(x) \equiv y'_k + 1 \pmod{I_G}$, le résultat est prouvé dans ce cas-là. Enfin, et de même, si $g = x \cdot g_k^{-1}$, on a

$$d(x \cdot g_k^{-1}) \stackrel{\text{H.R.}}{=} \sum_{i \neq k} y'_i \cdot d(g_i) + \underbrace{((y'_k - 1) - d(g_k^{-1}) + d(x) \cdot (-1 - d(g_k^{-1})))}_{\equiv (y'_k - 1) \pmod{I_G}} \cdot d(g_k),$$

ce qui montre aussi le résultat dans ce cas-là. Pour le fait que $d(g) = \sum_{i=1}^n d(g_i) \cdot z_i$, la preuve est similaire.

Considérons maintenant l'application $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\alpha} G/G'$ définie par $\alpha \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^n g_i^{l_i} \pmod{G'}$. Cette application est un homomorphisme surjectif de groupes, car G/G' est abélien. Son noyau est un sous-groupe de \mathbb{Z}^n d'indice $[G : G'] < \infty$; c'est donc aussi un groupe abélien libre de rang n . Donc c'est l'image d'une application \mathbb{Z} -linéaire injective $\mathbb{Z}^n \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}^n$ (on dit que la suite exacte $0 \rightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\alpha} G/G' \rightarrow 1$

est une *présentation de G/G'* . l'application β est décrite par une matrice $(m_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ de déterminant $[G : G']$. On a donc, pour chaque $j = 1, \dots, n$ une relation

$$\tau_j \cdot \prod_{i=1}^n g_i^{m_{ij}} = 1 \quad \text{pour un } \tau_j \in G'.$$

Appliquant d à ces relations, en se souvenant que $d(1) = 0$, et en utilisant la relation $(+)$, on trouve pour chaque $j = 1, \dots, n$ une relation

$$\sum_{k=1}^n \tau_{jk} \cdot d(g_k) = 0 \text{ avec des } \tau_{jk} \in \mathbb{Z}[G] \text{ tels que } \tau_{jk} \equiv m_{kj} \pmod{I_G}, \quad (+*)$$

(les τ_j de la relation précédente ne contribuent pas aux $n_i^+ - n_i^-$, car étant dans G' , ce sont des produits de commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$ qui ont autant de $+$ que de $-$). Posons $\tau = \det(\tau_{jk})$ défini par la formule $\sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \tau_{1\sigma(1)} \cdots \tau_{n\sigma(n)}$, et on définit $(\tilde{\tau}_{ik})$ la co-matrice de (τ_{ik}) telle que $\tilde{\tau}_{ik} = (-1)^{i+k} \det(\tau(i, k))$, où $\tau(i, k)$ est la matrice obtenue en biffant dans (τ_{ik}) la i^e colonne et la j^e ligne. Si on rappelle ces choses-là, c'est que $\mathbb{Z}[G]$ n'est pas forcément commutatif. Pour appliquer les théorèmes d'algèbre linéaire classiques, il faut passer à l'anneau commutatif (on vient de le voir) $\mathbb{Z}[G]/(I_{G'} \cdot \mathbb{Z}[G]) \simeq \mathbb{Z}[G/G']$. On a donc, pour tout i, k :

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\tau}_{ij} \cdot \tau_{jk} = \delta_{ik} \cdot \tau + d_{ik} \text{ avec } d_{ik} \in I_{G'} \cdot \mathbb{Z}[G] \text{ et } \delta_{ij} \text{ est le symbole de Kronecker.}$$

En multipliant cette relation par $d(g_k)$ et en sommant sur k , on obtient

$$\tau \cdot d(g_i) = \sum_{j=1}^n \tilde{\tau}_{ij} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \tau_{jk} \cdot d(g_k) \right)}_{=0 \text{ rel. } (+*)} - \sum_{k=1}^n d_{ik} d(g_k),$$

et donc $\tau \cdot d(g_i) \equiv 0 \pmod{\underbrace{I_{G'} \cdot \mathbb{Z}[G] \cdot I_G}_{=I_{G'} \cdot I_G}}$ pour tout i . Soit $g \in G$, on se souvient que juste après la relation $(+)$, on a vu qu'il existait de $z_i \in \mathbb{Z}[G]$ tels que $d(g) = \sum_{i=1}^n d(g_i) \cdot z_i$, donc $\tau \cdot d(g) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\tau \cdot d(g_i)}_{\equiv 0} \cdot z_i$.

On trouve alors la relation :

$$\tau \cdot d(g) \equiv 0 \pmod{I_{G'} \cdot I_G} \quad \text{pour tout } g \in G. \quad (++)$$

Notant toujours \bar{x} la classe de $x \in \mathbb{Z}[G]$ modulo $I_{G'} \cdot \mathbb{Z}[G]$, on a *a priori* (cf. preuve de (**)) $\bar{\tau} = \sum_{t \in T} n_{\bar{t}} \cdot \bar{t}$, avec $n_{\bar{t}} \in \mathbb{Z}$, uniques. Soit $g \in G$. La relation $\tau \cdot d(g) = \tau \cdot (g - 1) \equiv 0 \pmod{I_{G'} \cdot I_G}$ donne $\tau \cdot g \equiv \tau \pmod{I_{G'} \cdot I_G}$ donc *a fortiori* $\pmod{I_{G'} \cdot \mathbb{Z}[G]}$; et donc $\bar{\tau} \cdot \bar{g} = \bar{\tau}$ ou encore

$$\sum_{t \in T} n_{\bar{t}} \cdot \bar{t} = \sum_{t \in T} n_{\bar{t}} \cdot \bar{t} \cdot \bar{g} = \sum_{t \in T} n_{\bar{t} \cdot \bar{g}^{-1}} \cdot \bar{t},$$

la dernière égalité venant du fait que $T \cdot g$ est une transversale et que G agit transitivement sur les classes à droite de G modulo G' ; ainsi, $n_{\bar{t} \cdot \bar{g}^{-1}} = n_{\bar{t}}$ pour tout $t \in T$ et $g \in G$. Cela prouve que les $n_{\bar{t}}$ sont tous égaux à un même entier, disons m . On a donc

$$\tau \equiv m \cdot \sum_{t \in T} t \pmod{I_{G'} \cdot \mathbb{Z}[G]}, \quad (+++)$$

donc *a fortiori* modulo I_G . Mais comme $\tau_{ij} \equiv m_{ji} \pmod{I_G}$, pour tout i, j , on a $\tau \equiv \det(m_{ij}) = [G : G'] \pmod{I_G}$. D'autre part $t \equiv 1 \pmod{I_G}$ pour tout $t \in T$ et que $|T| = [G : G']$, on a donc

$$[G : G'] = \det(m_{ij}) \equiv \tau \stackrel{+++}{\equiv} m \cdot \sum_{t \in T} t \equiv m \cdot [G : G'] \pmod{I_G}.$$

Ce qui prouve que $m \equiv 1 \pmod{I_G}$ ($\mathbb{Z}[G]/I_G$ est isomorphe à \mathbb{Z} donc intègre), d'où $m = 1$, puisque la congruence modulo I_G est l'égalité pour les entiers. L'équivalence $(+++)$ devient alors $\tau \equiv \sum_{t \in T} t \pmod{I_{G'} \cdot \mathbb{Z}[G]}$, et donc $\tau \cdot d(g) \equiv (\sum_{t \in T} t) \cdot d(g) \pmod{\underbrace{I_{G'} \cdot \mathbb{Z}[G] \cdot I_G}_{=I_{G'} \cdot I_G}}$. Finalement, l'équivalence $(++)$ devient

$$\left(\sum_{t \in T} t \right) \cdot d(g) \equiv 0 \pmod{I_{G'} \cdot I_G}$$

qui est l'équivalence $(*)$ cherchée, ce qui prouve le théorème. #

Maintenant que ce long et joli théorème de théorie de groupe est prouvé, nous pouvons revenir attaquer le problème de front

Théorème (12.11)

Soit $K \subset E \subset L$ des corps de nombres. On suppose L/K galoisien. Posons $G = \text{Gal}(L/K)$ et $H = \text{Gal}(L/E) \subset G$. Soit encore S , l'ensemble des idéaux de K ramifiés dans L et S' l'ensemble des idéaux de E ramifiés dans L . Alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} I_K^S & \xrightarrow{\Phi_{L/K}} & G/G' = G^{\text{ab}} \\ \downarrow i & & \downarrow V_{G \rightarrow H} \\ I_E^{S'} & \xrightarrow{\Phi_{L/E}} & H/H' = H^{\text{ab}} \end{array}$$

où l'application $i(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a} \cdot O_E$ pour tout $\mathfrak{a} \in I_K^S$, et les Φ on été défini à la fin du Chapitre 10, dans la section "application à des extensions non abéliennes".

Preuve

Soient \mathfrak{p} un idéal premier de K , $\mathfrak{p} \notin S$, \mathfrak{P} un idéal premier de L au-dessus de \mathfrak{p} et $\sigma = \text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Le Théorème (0.17) nous apprend que l'ensemble des classes à droites de G modulo H se décompose sous l'action de $Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) = \langle \sigma \rangle$ en r orbites :

$$C_i = \{H \cdot \tau_i, H \cdot \tau_i \cdot \sigma, \dots, H \cdot \tau_i \cdot \sigma^{f_i-1}\} \quad i = 1, \dots, r,$$

où, en posant $\mathfrak{p}_i = \tau_i(\mathfrak{P}) \cap E$, $i = 1, \dots, r$, on a $i(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} \cdot O_E = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r$, et pour chaque i , $f_i = f(\mathfrak{p}_i/\mathfrak{p})$. On a vu à la fin du Chapitre 10 que $\Phi_{L/K}(\mathfrak{p}) = \sigma \pmod{G'}$. En s'inspirant de la preuve du Théorème (0.6), on a, pour $i = 1, \dots, r$

$$\text{Frob}_{L/E}(\tau_i(\mathfrak{P})/\mathfrak{p}_i) = \text{Frob}_{L/K}((\tau_i(\mathfrak{P})/\mathfrak{p})^{f_i}) = (\tau_i \cdot \sigma \cdot \tau_i^{-1})^{f_i} = \tau_i \cdot \sigma^{f_i} \cdot \tau_i^{-1}.$$

Ainsi,

$$\Phi_{L/E}(i(\mathfrak{p})) = \prod_{i=1}^r \tau_i \cdot \sigma^{f_i} \cdot \tau_i^{-1} \bmod H'. \quad (*)$$

D'autre part, on se souvient que $V_{G \rightarrow H}(\sigma \bmod G') = \prod h_t \bmod H'$, où pour chaque $t \in T$, $t \cdot \sigma = h_t \cdot t'$ ($h_t \in H, t' \in T$), où T est n'importe quelle transversale à droite de H dans G . Alors prenons par exemple

$$T = \{\tau_1, \tau_1\sigma, \dots, \tau_1\sigma^{f_1-1}, \dots, \tau_r, \tau_r\sigma, \dots, \tau_r\sigma^{f_r-1}\}.$$

Remarquons maintenant que, pour $0 \leq i < f_j - 1$, $j = 1, \dots, r$, on a $(\tau_j \cdot \sigma^i) \cdot \sigma = \tau_j \cdot \sigma^{i+1}$, et donc $h_{\tau_j \cdot \sigma^i} = 1$. Sinon, pour $j = 1, \dots, r$, on a $(\tau_j \cdot \sigma^{f_j-1}) \cdot \sigma = \tau_j \cdot \sigma^{f_j} = h_{\tau_j \cdot \sigma^{f_j-1}} \cdot \tau_j$. Ce qui veut dire que $h_{\tau_j \cdot \sigma^{f_j-1}} = \tau_j \cdot \sigma^{f_j} \cdot \tau_j^{-1}$. Et enfin,

$$V_{G \rightarrow H}(\Phi_{L/K}(\mathfrak{p})) = V_{G \rightarrow H}(\sigma \bmod G') = \prod_{i=1}^r \tau_i \cdot \sigma^{f_i} \cdot \tau_i^{-1} \bmod H'.$$

Ce qui donne, combiné avec (*), $\Phi_{L/E}(i(\mathfrak{p})) = V_{G \rightarrow H}(\Phi_{L/K}(\mathfrak{p}))$. #

Théorème (12.12)(Théorème des idéaux principaux de la théorie du corps de classe)

Soit K un corps de nombres. Notons E le corps de Hilbert de K . Alors tout idéal de K capitule dans E , i.e. devient principal dans E .

Preuve

Posons L le corps de Hilbert de E . L'extension L/K est abélienne. En effet, soit L^{alg} la clôture algébrique de L et $\varphi : L \rightarrow L^{\text{alg}}$, un K -morphisme. Il faut voir que $\varphi(L) \subset L$. L'extension E/K étant galoisienne, on a donc $\varphi(E) = E$. Donc $\varphi(L)$ est une extension de E . En faisant des allers et venues avec φ pour des groupes d'automorphismes (et d'inerties), on voit que $\varphi(L)/E$ est une extension abélienne non ramifiée ($\text{Gal}(\varphi(L)/E) = \varphi \cdot \text{Gal}(L/E) \cdot \varphi^{-1}$). Donc $\varphi(L) \subset$ le corps de Hilbert de $E = L$ (en vertu du Corollaire (11.18)), ce qu'il fallait voir.

Notons alors $G = \text{Gal}(L/K)$ et $H = \text{Gal}(L/E)$. La théorie de Galois nous dit alors que $\text{Gal}(E/K) \simeq G/H$. L'extension E/K est la plus grande sous-extension abélienne de L/K ; c'est évident, car L/K est une extension non ramifiée (il en est donc de même de toute-sous extension) et nous savons que L/K contient toute extension abélienne non-ramifiée de K (cf. Corollaire (11.18)). Donc, G/H est le plus grand quotient abélien de G , et alors, par définition, $H = G'$. De plus $H = G'$ est abélien, donc $G'' = \{1\}$. Puisque L/E est abélienne $\Phi_{L/E}$ est l'application d'Artin usuelle; et on a aussi $\Phi_{L/K} = \Phi'_{E/K}$ (à nouveau, car E est la plus grande sous-extension abélienne de L/K et vu la fin du Chapitre 10). On veut utiliser le Théorème (12.11). Dans notre cas, $S = S' = \emptyset$, ainsi $I_K^S = I_K$ et $I_E^{S'} = I_E$. Ce même théorème nous dit qu'on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} I_K & \xrightarrow{\Phi_{E/K}} & G/G' \simeq \text{Gal}(E/K) \\ \downarrow i & & \downarrow V_{G \rightarrow G'} \\ I_E & \xrightarrow{\Phi_{L/E}} & G'/G'' \simeq G' = \text{Gal}(L/E) \end{array}$$

Le Théorème (2.16) nous dit que $\Phi_{E/K}$ et $\Phi_{L/E}$ sont surjectives. Le Corollaire (11.18) nous dit que $\ker(\Phi_{E/K}) = P_K$ et $\ker(\Phi_{L/E}) = P_E$, de plus $i(P_K) \subset P_E$. Donc le diagramme précédent “passe au quotients” donnant un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 I_K/P_K & \xrightarrow[\simeq]{\overline{\Phi_{E/K}}} & G/G' \\
 \downarrow \bar{i} & & \downarrow V_{G \rightarrow G'} \\
 I_E/P_E & \xrightarrow[\simeq]{\overline{\Phi_{L/E}}} & G'/G''
 \end{array}$$

L'hypothèse du Théorème (12.8) est satisfaite, donc l'homomorphisme $V_{G \rightarrow G'}$ est l'homomorphisme trivial, donc \bar{i} est aussi trivial, ce qui veut dire que $i(I_K) \subset P_E$, donc le théorème. \neq

Maintenant nous pouvons dire que nous avons construit le corps de Hilbert complètement. C'est une certaine satisfaction et on espère que le lecteur aura apprécié la lecture de ce texte jusqu'ici et est d'accord que cette construction n'est pas totalement “pédestre”.

Chapitre 13 :

Interprétation idélique

La manière de présenter habituellement la théorie du corps de classe passe par un nouvel objet qu'on appelle les idéles. Nous verrons que le Théorème (10.1) se traduit dans ce cadre de manière très simple (cf. Corollaire (13.23) et Théorème (13.29)). Seulement, nous trouvons (mais c'est un avis personnel) que cette interprétation du corps de classe est plus obscure. C'est-à-dire que l'énoncé est très court (c'était probablement la volonté de faire ainsi), mais toutes les difficultés ont été pour ainsi dire "mises sous le tapis". Néanmoins, il nous a paru important de faire le lien avec la vision classique de cette magnifique théorie.

Définition (13.1)

Soit K un corps de nombres. Rappelons qu'on note $\mathbb{P}(K), \mathbb{P}_0(K), \mathbb{P}_\infty(K)$ l'ensemble des places, des places finies respectivement infinies de K . Pour chaque $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, on note $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ le complété de K en \mathfrak{p} , $O_{\mathfrak{p}}$ son anneau de valuation, $v_{\mathfrak{p}}$ la valuation \mathfrak{p} -adique et $|x|_{\mathfrak{p}} = \mathbb{N}(\mathfrak{p})^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}$. Si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_\infty(K)$, on note aussi $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ le complété et si $\sigma_{\mathfrak{p}}$ est un plongement qui définit \mathfrak{p} , on pose

$$|x|_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} |\sigma_{\mathfrak{p}}(x)| & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est réelle} \\ |\sigma_{\mathfrak{p}}(x)|^2 & \text{si } \mathfrak{p} \text{ est complexe.} \end{cases}$$

Remarquons que dans le cas complexe, on avait défini $|x|_{\mathfrak{p}}$ autrement (cf. page 5) et que maintenant ce n'est plus vraiment une valeur absolue (on n'a pas $|x+y|_{\mathfrak{p}} \leq |x|_{\mathfrak{p}} + |y|_{\mathfrak{p}}$), mais sans cette définition (un peu malheureuse, il est vrai), la proposition suivante ne serait pas vraie...

On note aussi

$$O_{\mathfrak{p}}^* = \{x \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \mid |x|_{\mathfrak{p}} = 1\} \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K).$$

Si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, on a $O_{\mathfrak{p}}^* = U_{\mathfrak{p}}$, le groupe des unités de $O_{\mathfrak{p}}$; et si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_\infty(K)$, $O_{\mathfrak{p}}^*$ est le cercle unité si \mathfrak{p} est complexe et $\{\pm 1\}$ si \mathfrak{p} est réelle.

Proposition (13.2)

Pour tout $x \in K^*$, on a

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} |x|_{\mathfrak{p}} = 1.$$

Preuve

Soit donc $x \in K^*$. Il existe $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r \in \mathbb{P}_0(K)$ tels que $x \cdot O_K = \mathfrak{p}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{k_r}$. D'autre part, $|x|_{\mathfrak{p}} = 1$ si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$, $i = 1, \dots, r$. Et donc, $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} |x|_{\mathfrak{p}} = \prod_{i=1}^r |x|_{\mathfrak{p}_i} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_\infty(K)} |x|_{\mathfrak{p}}$. Or, d'une part, $\prod_{i=1}^r |x|_{\mathfrak{p}_i} = \prod_{i=1}^r (\mathbb{N}(\mathfrak{p}_i))^{-k_i} = \mathbb{N}(\mathfrak{p}_1^{k_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{k_r})^{-1} = |N_{K/\mathbb{Q}}(x)|^{-1}$. D'autre part, si S est l'ensemble de tous les plongements de K dans \mathbb{C} , on a $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_\infty(K)} |x|_{\mathfrak{p}} = \prod_{\sigma \in S} |\sigma(x)| = |\prod_{\sigma \in S} \sigma(x)| = |N_{K/\mathbb{Q}}(x)|$. Finalement,

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} |x|_{\mathfrak{p}} = |N_{K/\mathbb{Q}}(x)|^{-1} \cdot |N_{K/\mathbb{Q}}(x)| = 1$$

#

Définition (13.3)

Soit K un corps de nombres. Un *adèle* de K est une famille $(\alpha_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)}$ telle que $\alpha_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ et $\alpha_{\mathfrak{p}} \in O_{\mathfrak{p}}$ pour presque tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$. Le syntagme *pour presque tout* signifie “pour tout élément de l’ensemble considéré sauf, éventuellement, un nombre fini”. Nous résumerons tout cela par “ppt”. L’ensemble des adèles de K se note \mathbb{A}_K . En résumé, on a

$$\mathbb{A}_K = \left\{ (\alpha_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \mid \alpha_{\mathfrak{p}} \in O_{\mathfrak{p}} \text{ ppt } \mathfrak{p} \right\}.$$

De même, on définit l’ensemble des *idèles* de K

$$\mathbb{I}_K = \left\{ (\alpha_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \mid \alpha_{\mathfrak{p}} \in O_{\mathfrak{p}}^* \text{ ppt } \mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \right\}.$$

Remarquons qu’historiquement, le mot “idèle” est antérieur au mot “adèle”. Idèle vient de ideal elements et adèle vient de additive idèle. L’accent grave vient de la ressemblance avec le prénom féminin et que les inventeurs du concept étaient certainement francophones. Mais attention, on dit “**un** adèle” et “**un** idèle”.

Clairement, \mathbb{A}_K est un sous-anneau de l’anneau produit $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ et \mathbb{I}_K est un sous-groupe du groupe produit $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$.

Si S est une partie finie de $\mathbb{P}(K)$ qui contient $\mathbb{P}_{\infty}(K)$, on note

$$\mathbb{A}_K(S) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O_{\mathfrak{p}} \quad \text{et} \quad \mathbb{I}_K(S) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O_{\mathfrak{p}}^*.$$

Dans le cas où $S = \mathbb{P}_{\infty}(K)$, on écrira $\mathbb{A}_K(\infty)$ et $\mathbb{I}_K(\infty)$.

Les $\mathbb{A}_K(S)$ sont des sous-anneaux des \mathbb{A}_K et les $\mathbb{I}_K(S)$ sont des sous-groupes des \mathbb{I}_K . Ils sont filtrants supérieurement (toute réunion finie possède un élément qui contient cette réunion) et leur réunion donnent \mathbb{A}_K respectivement \mathbb{I}_K .

On munit \mathbb{A}_K et \mathbb{I}_K d’une topologie comme suit :

Pour \mathbb{A}_K une base d’ouverts est l’ensemble des parties de la forme $\prod_{\mathfrak{p}} V_{\mathfrak{p}}$, où $V_{\mathfrak{p}}$ est un ouvert de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$, et $V_{\mathfrak{p}} = O_{\mathfrak{p}}$ ppt \mathfrak{p} . Remarquons que si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, $O_{\mathfrak{p}} = \{x \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \mid |x|_{\mathfrak{p}} \leq 1\}$ est un ouvert malgré les apparences : pour la topologie \mathfrak{p} -adique de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, “les boules fermées sont ouvertes et réciproquement” on dit que c’est un espace topologique *totalemt discontinu*. De plus, dans $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, $O_{\mathfrak{p}}$ est compact (cf. [Fr-Tay, II.4, rel. (3.29), p.86]).

Pour \mathbb{I}_K , de même, une base d’ouverts est l’ensemble des parties de la forme $\prod_{\mathfrak{p}} V_{\mathfrak{p}}$, où $V_{\mathfrak{p}}$ est un ouvert de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$, et $V_{\mathfrak{p}} = O_{\mathfrak{p}}^*$ ppt \mathfrak{p} .

Pour cette topologie, la topologie induite sur $\mathbb{A}_K(S)$ (resp. $\mathbb{I}_K(S)$) est identique à la topologie produit, et $\mathbb{A}_K(S)$ (resp. $\mathbb{I}_K(S)$) est ouvert dans \mathbb{A}_K (resp. dans \mathbb{I}_K). Comme les $\mathbb{A}_K(S)$ et les $\mathbb{I}_K(S)$ sont localement compacts (ils sont les produits finis d’espaces localement compacts avec un produit d’espaces compacts), alors \mathbb{A}_K et \mathbb{I}_K sont localement compacts (pour tout $x \in \mathbb{A}_K$, il existe S tel que $x \in \mathbb{A}_K(S)$). Remarquons que dans notre acceptation de termes “compact” et “localement compact”, nous incluons la propriété d’être séparé. La réunion des $\mathbb{A}_K(S)$ (resp. des $\mathbb{I}_K(S)$) est filtrante et on peut voir \mathbb{A}_K , (resp.

\mathbb{I}_K) comme limite inductive des $\mathbb{A}_K(S)$, (resp. des $\mathbb{I}_K(S)$). En outre, cette topologie induit sur \mathbb{A}_K (resp. sur \mathbb{I}_K) une structure de d'anneau (resp. de groupe) topologique, car chaque $\mathbb{A}_K(S)$ (resp. $\mathbb{A}_K(S)$) en est un.

Remarque

La topologie de \mathbb{I}_K n'est pas celle induite par celle de \mathbb{A}_K . En effet, choisissons pour chaque $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$ une uniformisante $\pi_{\mathfrak{p}}$ de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ et posons $x_{\mathfrak{p}}$ l'idèle $(1, \dots, 1, \pi_{\mathfrak{p}}, 1, \dots, 1)$, alors, pour la topologie des adèles, n'importe quel voisinage de $(1, \dots, 1)$ contient presque tous les $x_{\mathfrak{p}}$, donc $(1, \dots, 1)$ est un point d'accumulation de la famille des $x_{\mathfrak{p}}$. En revanche, pour la topologie des idèles, $\mathbb{I}_K(\infty)$ est un voisinage de $(1, \dots, 1)$ et il ne contient aucun des $x_{\mathfrak{p}}$.

Cette remarque est importante pour nous pousser à la prudence quand nous raisonnerons sur ces objets. En revanche, nous avons un résultat qui donne un lien entre les deux topologies :

Lemme (13.4)

L'application injective

$$\begin{aligned} j : \mathbb{I}_K &\longrightarrow \mathbb{A}_K \times \mathbb{A}_K \\ x &\longmapsto (x, x^{-1}) \end{aligned}$$

induit la topologie de \mathbb{I}_K (identifié à un sous-espace de $\mathbb{A}_K \times \mathbb{A}_K$).

Preuve

Il suffit de montrer que j est continue et que tout ouvert de \mathbb{I}_K est l'image réciproque d'un ouvert de $\mathbb{A}_K \times \mathbb{A}_K$. On remarque que

$$j^{-1} \left(\left(\prod_{\mathfrak{p} \in S} V_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O_{\mathfrak{p}} \right) \times \left(\prod_{\mathfrak{p} \in S} V'_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O_{\mathfrak{p}} \right) \right) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} (V_{\mathfrak{p}} \setminus \{0\}) \cap (V'_{\mathfrak{p}} \setminus \{0\})^{-1} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O_{\mathfrak{p}}^*$$

qui est un ouvert de base de \mathbb{I}_K , car $(V_{\mathfrak{p}} \setminus \{0\})$ et $(V'_{\mathfrak{p}} \setminus \{0\})^{-1}$ sont des ouverts de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$ si $V_{\mathfrak{p}}$ et $V'_{\mathfrak{p}}$ sont des ouverts de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ (le passage de x à x^{-1} est une application bi-continue). Donc l'application j est continue. D'autre part,

$$\prod_{\mathfrak{p} \in S} V_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O_{\mathfrak{p}}^* = j^{-1} \left(\left(\prod_{\mathfrak{p} \in S} V_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O_{\mathfrak{p}} \right) \times \left(\prod_{\mathfrak{p} \in S} V_{\mathfrak{p}}^{-1} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} O_{\mathfrak{p}} \right) \right),$$

ce qui montre le lemme. #

Lemme (13.5)

Soit G un groupe topologique séparé et H un sous-groupe de G . Si H est discret, alors il est fermé

Preuve

Mettons que G soit noté multiplicativement. Soit $a \in G \setminus H$ et V un ouvert tel que $V \cap H = \{1\}$ (c'est possible puisque H est discret). On choisit un ouvert U , voisinage de 1 tel que $a \cdot U \cdot U^{-1} \cdot a \subset V$. C'est toujours possible, car l'application $(x, y) \mapsto a \cdot x \cdot y^{-1} \cdot a^{-1}$ est une application continue de $G \times G$ dans G . Supposons que $x, y \in H \cap a \cdot U$. Alors $xy^{-1} \in H$ et $xy^{-1} \in a \cdot U \cdot U^{-1} \cdot a \subset V$. Donc $xy^{-1} = 1$, i.e.

$x = y$. Donc le voisinage $a \cdot U$ de a contient au plus un élément de H . Puisque G est séparé, on peut, en restreignant $a \cdot U$ si nécessaire, trouver un voisinage de a qui ne rencontre pas H . Donc $G \setminus H$ est ouvert et donc H est fermé. $\#$

Définition (13.6)

Pour chaque $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$, on suppose choisi une identification de K avec un sous-corps de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. Si $x \in K$, on lui associe diagonalement l'élément $(x, x, \dots, x) \in \prod_{\mathfrak{p}} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. C'est un adèle, car $|x|_{\mathfrak{p}} \leq 1$ ppt \mathfrak{p} . On obtient un homomorphisme d'anneau $K \rightarrow \mathbb{A}_K$. De même, si $x \in K^*$, $|x|_{\mathfrak{p}} = 1$ ppt \mathfrak{p} . Donc $x \mapsto (x, \dots, x)$ définit un homomorphisme de groupe de K^* dans \mathbb{I}_K . Nous associerons K (resp. K^*) avec son image dans \mathbb{A}_K (resp. dans \mathbb{I}_K) que nous appelleront les adèles (resp. les idèles) *principaux*.

Lemme (13.7)

Les adèles principaux forment un sous-anneau discret (donc fermé en vertu du lemme précédent) de \mathbb{A}_K ; et les idèles principaux forment un sous-groupe discret (et donc fermé) de \mathbb{I}_K .

Preuve

L'inclusion $\mathbb{I}_K \rightarrow \mathbb{A}_K$ est continue (on peut la voir comme la composition des applications $x \mapsto (x, x^{-1}) \mapsto x$ qui est continue en vertu du Lemme (13.4)), donc il suffit de montrer que K est discret dans \mathbb{A}_K . En effet, l'image réciproque de K de cette inclusion qui est K^* serait alors discret dans \mathbb{I}_K (l'image réciproque d'un ouvert ne rencontrant pas $(1, \dots, 1)$ est un ouvert ne rencontrant pas $(1, \dots, 1)$).

Considérons alors l'ensemble

$$N = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\infty}(K)} \{\alpha \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \mid |\alpha|_{\mathfrak{p}} < 1\} \times \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} O_{\mathfrak{p}}.$$

Clairement N est un voisinage de $(0, 0, \dots, 0)$ dans \mathbb{A}_K . Si $x \in K \cap N$, alors $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} |x|_{\mathfrak{p}} < 1$ (car les éléments de $O_{\mathfrak{p}}$ sont tels que $|\alpha|_{\mathfrak{p}} \leq 1$). Mais en vertu de la formule du produit (Proposition (13.2)) le seul $x \in K$ possible est $x = (0, \dots, 0)$. Cela montre que $(0, \dots, 0)$ est isolé, donc par translation que K est discret dans \mathbb{A}_K . $\#$

Lemme (13.8)

Soit G un groupe topologique noté multiplicativement. Supposons que $\{1\}$ soit fermé. Alors G est séparé.

Preuve

Puisque $\{1\}$ est fermé, alors $\{x\}$ est fermé pour tout $x \in G$ par continuité. On montre que $\{1\}$ et $\{x\}$ peuvent être séparés. Posons $V = G \setminus \{x\}$ qui est ouvert. Par continuité de l'application $(x, y) \mapsto x \cdot y$, il existe U un voisinage de 1 tel que $U \cdot U \subset V$. Quitte à remplacer U par $U \cap U^{-1}$, on peut supposer que $U = U^{-1}$. Alors U et $x \cdot U$ sont des voisinages de 1 et x sont disjoints : si $U \ni u = x \cdot v \in x \cdot U$, alors $x = u \cdot v^{-1} \in U \cdot U \subset V$, ce qui est une contradiction. $\#$

Proposition-Définition (13.9)

On note C_K le groupe (multiplicatif) quotient \mathbb{I}_K/K^* muni de la topologie quotient. On appelle C_K le groupe des classes d'idèles. On considère de même le groupe (additif) quotient \mathbb{A}_K/K , qu'on appellera le groupe des classes d'adèles. On affirme alors que ces deux groupes sont localement compacts.

Preuve

Ce fait vient du fait que K (resp. K^*) est fermé (et normal) dans \mathbb{A}_K (resp. dans \mathbb{I}_K) en vertu du lemme précédent. Supposons en toute généralité que G soit un groupe topologique localement compact et que H soit un sous-groupe normal fermé. Rappelons que la topologie quotient sur G/H est la plus fine telle que l'application $\pi : G \rightarrow G/H$ soit continue et donc $U \subset G/H$ est ouvert si et seulement si $\pi^{-1}(U)$ est ouvert. Il faut déjà montrer que G/H est séparé. Pour cela, il suffit de montrer comme vu au lemme précédent (Lemme (13.8)) que $\{\bar{1}\}$ est fermé dans G/H . C'est évident car $\pi^{-1}(G/H \setminus \{\bar{1}\}) = G \setminus H$ qui est ouvert puisque H est fermé. Donc G/H est séparé. Maintenant, l'application π est ouverte, car $\pi^{-1}(\pi(U)) = H \cdot U = \bigcup_{x \in H} x \cdot U$ qui est ouvert si U est ouvert. Enfin, pour montrer que G/H est localement compact, il suffit par translation de trouver un voisinage compact de $\bar{1}$. Puisque, par hypothèse, G est localement compact, on considère U un voisinage compact de 1. Puisque π est une application ouverte, $\pi(U)$ est un voisinage de $\bar{1}$, il est en outre compact en vertu de la propriété bien connue que l'image directe d'un compact par une application continue dans un espace séparé est compact. Donc G/H est localement compact. $\#$

Maintenant nous allons faire quelques investigations en vue de montrer que \mathbb{A}_K/K est en fait compact. Nous montrerons aussi que \mathbb{I}_K/K^* ne l'est en revanche pas. Tout d'abord voici une forme particulière du théorème chinois :

Lemme (13.10)

Soit $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \mathbb{P}_0(K)$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des nombres réels positifs et, pour chaque $i = 1, \dots, n$, $\alpha_i \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}_i}$. Alors il existe $\beta \in K$ tel que

$$|\beta - \alpha_i|_{\mathfrak{p}_i} \leq \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n \text{ et } |\beta|_{\mathfrak{q}} \leq 1 \text{ pour tout idéal premier } \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}_i, i = 1, \dots, n.$$

Preuve

Puisque K est dense comme dans chaque $K_{\mathfrak{p}}$, on peut supposer que $\alpha_i \in K$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $\beta_1, \dots, \beta_n \in O_K$ tel que $\alpha_i = \frac{\beta_i}{m}$, pour $i = 1, \dots, n$. En effet, montrons-le pour α_1 , on prend ensuite un dénominateur commun : puisque α_1 est algébrique, il existe $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $a_k \alpha_1^k + a_{k-1} \alpha_1^{k-1} + \dots + a_0 = 0$. En multipliant cette dernière égalité par a_k^{k-1} , on montre que $a_k \cdot \alpha_1 \in O_K$ et le tour est joué. Considérons $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_s$ les idéaux premiers distincts des \mathfrak{p}_i qui divisent m . Par le théorème chinois, il existe $\gamma \in O_K$ tel que $|\gamma - \beta_i|_{\mathfrak{p}_i} \leq |m|_{\mathfrak{p}_i} \cdot \varepsilon_i$, $\forall i = 1, \dots, n$ et $|\gamma|_{\mathfrak{q}_j} \leq |m|_{\mathfrak{q}_j}$, pour $\forall j = 1, \dots, s$. Alors, on voit facilement que $\beta = \frac{\gamma}{m}$ répond aux exigences du lemme. $\#$

Lemme (13.11)

On a les deux égalités :

- a) $\mathbb{A}_K(\infty) + K = \mathbb{A}_K$
- b) $\mathbb{A}_K(\infty) \cap K = O_K$ (où O_K est évidemment vu comme le plongement diagonal de O_K dans \mathbb{A}_K).

Preuve

Montrons b). L'inclusion $O_K \subset \mathbb{A}_K(\infty) \cap K$ est claire. Inversement, si $x \in \mathbb{A}_K(\infty) \cap K$, alors $x \in O_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$, c'est-à-dire $|x|_{\mathfrak{p}} \leq 1$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$. Cela veut dire que $x \in O_K$.

Montrons a). Il faut donc montrer que $\forall (a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{A}_K$, $\exists x \in K$ tel que $|a_{\mathfrak{p}} - x|_{\mathfrak{p}} \leq 1$, $\forall \mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$. L'ensemble des $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)$ tel que $|a_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} > 1$ est fini. Notons

$$T := \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid |a_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} > 1\} \text{ et } S := \{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K) \mid |a_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} \leq 1\}.$$

Alors T et S sont finis. Posons $m = \left(\prod_{\mathfrak{p} \in T} |a_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}}\right)^k$, avec $k \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $|m \cdot a_{\mathfrak{p}}|_{\mathfrak{p}} \leq 1$ pour tout $\mathfrak{p} \in T$. Par le lemme précédent, il existe $\beta \in K$ tel que $|m \cdot a_{\mathfrak{p}} - \beta|_{\mathfrak{p}} \leq |m|_{\mathfrak{p}}$ pour tout $\mathfrak{p} \in T$ et $|\beta|_{\mathfrak{q}} \leq 1$ pour tout $\mathfrak{q} \in \mathbb{P}_0(K) \setminus T$. Alors $x := \frac{\beta}{m}$ répond à la question : si $\mathfrak{p} \in T$, $|m \cdot a_{\mathfrak{p}} - \beta|_{\mathfrak{p}} \leq |m|_{\mathfrak{p}}$ implique bien sûr $|a_{\mathfrak{p}} - x|_{\mathfrak{p}} \leq 1$; et si $\mathfrak{q} \in \mathbb{P}_0(K) \setminus T$, $|a_{\mathfrak{q}} - \frac{\beta}{m}|_{\mathfrak{q}} = \frac{1}{|m|_{\mathfrak{q}}} \cdot |m \cdot a_{\mathfrak{q}} - \beta|_{\mathfrak{q}} = |m \cdot a_{\mathfrak{q}} - \beta|_{\mathfrak{q}} \leq \max(|m \cdot a_{\mathfrak{q}}|_{\mathfrak{q}}, |\beta|_{\mathfrak{q}}) \leq 1$. Ce qui achève la preuve du lemme. #

Théorème (13.12)

Soit K un corps de nombres. Alors \mathbb{A}_K/K est compact (on dit alors que K est co-compact dans \mathbb{A}_K).

Preuve

Rappelons le fait suivant : supposons que $[K : \mathbb{Q}] = r + 2s$. L'application

$$\begin{aligned} v : K &\rightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{C}^s \simeq \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\infty}(K)} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \\ x &\mapsto (\sigma_1, \dots, \sigma_r, \sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s}) \end{aligned}$$

est une application telle que $v(O_K)$ est un \mathbb{Z} -réseau plein (les σ_i sont les plongements de K dans \mathbb{C} . Et si $\omega_1, \dots, \omega_n$ est une \mathbb{Z} -base de O_K , alors l'ensemble

$$F_{\infty} = \left\{ x \in \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\infty}(K)} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \mid x = \sum_{i=1}^n t_i \cdot v(\omega_i) \ 0 \leq t_i < 1 \right\}$$

est un paralléloèdre fondamental (voir Lemme (1.4)). Soit $F = F_{\infty} \times \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} O_{\mathfrak{p}}$. Il est évident que l'adhérence \overline{F} de F est compacte dans \mathbb{A}_K par le lemme de Tychonov.

Soit $x \in \mathbb{A}_K$. Notons \overline{x} la classe de x dans \mathbb{A}_K/K . La partie a) du Lemme (13.11), nous assure l'existence de $y \in \mathbb{A}_K(\infty)$ tel que $\overline{x} = \overline{y}$. Notons $y = (y_{\infty}, y_0)$, avec $y_{\infty} \in \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_{\infty}(K)} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. Par ce qui précède, il existe $l \in O_K$ et $z_{\infty} \in F_{\infty}$ tel que $y_{\infty} = z_{\infty} + l_{\infty}$, où $l_{\infty} = v(l)$. On a donc $y = (y - l) + l$ et donc $\overline{x} = \overline{y} = \overline{y - l}$ et $y - l \in F \subset \overline{F}$. Ainsi, la restriction de la projection $\mathbb{A}_K \rightarrow \mathbb{A}_K/K$ à \overline{F} est surjective et bien sûr continue. Puisque \mathbb{A}_K/K est localement compact (Proposition-Définition (13.9)) et l'image d'une application continue d'un compact d'un espace séparé dans un autre est compact. Cela montre que \mathbb{A}_K/K est compact. #

Nous allons maintenant prouver que $C_K = \mathbb{I}_K/K^*$ n'est pas compact.

Définition (13.13)

Soit $a = (a_p)_p \in \mathbb{I}_K$. Alors le produit $\prod_{p \in \mathbb{P}_K} |a_p|_p := |a|$ est bien défini, car c'est un produit fini, puisque $|a_p|_p = 1$ ppt p . On appellera $|a|$ le *volume* de a . L'application $\mathbb{I}_K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $a \mapsto |a|$ est clairement un homomorphisme (puisque chacune des normes est un homomorphisme), surjective (K possède au moins une place infinie p et on a $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{K}_p^*$ dans lequel on choisit un élément et on met 1 aux autres places), continue (il suffit de montrer que la restriction aux ouverts fondamentaux, qui sont du type $\prod_{p \notin S} O_p^* \times \prod_{p \in S} N_p$, où les N_p sont des ouverts de \mathbb{K}_p^* est continue, et c'est clairement le cas, puisque chacune des normes est continue). Le noyau de cette application est un sous-groupe fermé, car dans des groupes topologiques séparés, la pré-image d'un fermé est un fermé. On note ce noyau \mathbb{I}_K^0 et on appelle ce sous-groupe les *idèles spéciaux*. Par la formule du produit (Proposition (13.2)), on a $K^* \subset \mathbb{I}_K^0$. On note alors $C_K^0 = \mathbb{I}_K^0 / K^*$ qui est un sous-groupe fermé de $C_K = \mathbb{I}_K / K^*$.

Lemme (13.14)

Il existe un isomorphisme de groupe topologique $C_K \simeq C_K^0 \times \mathbb{R}_+^*$. En particulier, C_K n'est pas compact.

Preuve

L'application $\mathbb{I}_K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $a \mapsto |a|$ vue à la définition précédente admet une section continue : si $n = [K : \mathbb{Q}]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\rightarrow \mathbb{I}_K \\ t &\mapsto \underbrace{(t^{\frac{1}{n}}, \dots, t^{\frac{1}{n}})}_{\text{places inf.}} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{\text{places finies}}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathbb{I}_K \simeq \mathbb{I}_K^0 \times \mathbb{R}_+^*$. Puisque K^* est dans le noyau, l'application $|\cdot|$ induit aussi un homomorphisme surjectif continu $C_K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, et la section précédente donne aussi une section ici, ce qui montre notre lemme. #

Nous voyons donc (même si cela a déjà été vu) que les topologies idéliques et adéliques sont bien différentes. Nous allons maintenant prouver que C_K^0 est en revanche compact. Nous allons voir que la compacité de cet espace est équivalente au fait que le groupe des classe I_K / P_K est fini et au théorème de Dirichlet sur les unités de K , deux résultats que nous connaissons bien ! mais tout d'abord deux petits lemmes de topologie des groupes :

Lemme (13.15)

Soit G un groupe topologique, K une partie compacte de G et $O \supset K$ un voisinage de K . Alors il existe U un voisinage ouvert de 1 tel que $UK \subset O$.

Preuve

Soit $x \in K$. Alors il existe V_x voisinage de 1 tel que $V_x x \subset O$ (par exemple $V_x = O x^{-1}$). Puisque la multiplication $(x, y) \mapsto x \cdot y$ est par définition continue, il existe U_x voisinage ouvert de 1 tel que $U_x \cdot U_x \subset V_x$. Il est clair que $\{U_x x\}_{x \in K}$ est un recouvrement de K . Par compacité, il existe x_1, \dots, x_n tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} x_i$. Posons $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_i}$. Alors $UK \subset O$. En effet, soit $t = u \cdot k \in UK$. Puisque $k \in K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} x_i$, il existe i et $u_i \in U_{x_i}$ tel que $k = u_i \cdot x_i$. Donc $t = u \cdot u_i \cdot x_i \in U_{x_i} U_{x_i} x_i \subset V_{x_i} x_i \subset O$. Cela prouve le lemme. #

Lemme (13.16)

Soit

$$1 \rightarrow H \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} L \rightarrow 1$$

une suite exacte de groupes topologiques. On suppose f, g continue et g ouverte. Supposons H et L compacts et G séparé. Alors G est aussi compact.

Preuve

Comme H est compact et G est séparé, f est un homéomorphisme sur $f(H)$. On peut donc identifier H à $f(H)$ et f comme l'inclusion. Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de G . Pour chaque $x \in G$, Hx est compact. Donc, il existe $I_x \subset I$, fini, tel que $Hx \subset \bigcup_{i \in I_x} U_i$, ce qui veut dire que $H \subset \bigcup_{i \in I_x} U_i x^{-1}$. En vertu du lemme précédent, il existe U_x un voisinage de 1 tel que $U_x \cdot H \subset \bigcup_{i \in I_x} U_i x^{-1}$. Alors, $U_x Hx$ est un voisinage de Hx contenu dans $\bigcup_{i \in I_x} U_i$. Or, puisque H est un sous-groupe normal, on a $U_x Hx = U_x(xHx^{-1})x = U_x xH = \bigcup_{y \in U_x x} yH$ et comme H est le noyau de g , on a $g^{-1}(g(U_x Hx)) = U_x Hx$. Maintenant, puisque g est ouverte et surjective, l'ensemble $\{g(U_x Hx)\}_{x \in G}$ est un recouvrement ouvert de L . Puisque L est compact, il existe $x_1, \dots, x_n \in G$ tels que $L = \bigcup_{i=1}^n g(U_{x_i} Hx_i)$. En prenant le g^{-1} et en utilisant l'égalité vue avant, on a $G = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} Hx_i \subset \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j \in I_{x_i}} U_j \subset G$. Ce qui montre que G est compact. $\#$

Théorème (13.17)

Le sous-groupe des classes d'idèles spéciaux C_K^0 (cf. Définition (13.13)) est compact.

Preuve

Considérons I_K vu comme groupe topologique (avec la topologie discrète) et l'homomorphisme :

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{I}_K &\longrightarrow I_K \\ a = (a_p)_p &\longmapsto \prod_{p \in \mathbb{P}_0(K)} p^{v_p(a_p)}. \end{aligned}$$

Il est bien défini (les idèles n'ont qu'un nombre fini de a_p de valuation non nulle) et surjectif. Son noyau est $\mathbb{I}_K(\infty) = \prod_{p \in \mathbb{P}_\infty(K)} \mathbb{K}_p^* \times \prod_{p \in \mathbb{P}_0(K)} O_p^*$ qui est un ouvert de \mathbb{I}_K , donc cet homomorphisme est aussi continu. De plus, l'image de K^* est clairement P_K . D'où un isomorphisme topologique : $\mathbb{I}_K/(\mathbb{I}_K(\infty) \cdot K^*) \simeq I_K/P_K$. Si on restreint l'homomorphisme $\mathbb{I}_K \rightarrow I_K$ à \mathbb{I}_K^0 , il est encore continu et surjectif (on choisit judicieusement les places finies (comme pour celui de départ) puis on s'arrange avec les places infinies pour que le produit des normes donne 1). Le noyau est $\mathbb{I}_K^0(\infty) := \mathbb{I}_K^0 \cap \mathbb{I}_K(\infty)$, et, comme avant,

$$\mathbb{I}_K^0/(\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*) \simeq I_K/P_K, \quad (*)$$

qui est évidemment ouverte. L'application $\mathbb{I}_K^0/K^* \rightarrow \mathbb{I}_K^0/(\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*)$ est continue par définition et ouverte (cf. raisonnement dans la preuve la Proposition-Définition (13.9)) son noyau est évidemment $(\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*)/K^*$ qui est ouvert dans \mathbb{I}_K^0/K^* (car c'est l'image réciproque de $\{1\}$ qui est ouvert, car on vient de voir que $\mathbb{I}_K^0/(\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*)$ était muni de la topologie discrète). Ce qui nous donne une suite exacte :

$$1 \rightarrow (\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*)/K^* \xrightarrow{\text{continue}} \mathbb{I}_K^0/K^* \xrightarrow{\text{continue et ouvert}} \mathbb{I}_K^0/(\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*) \rightarrow 1. \quad (**)$$

D'autre part, l'inclusion $\mathbb{I}_K^0(\infty) \hookrightarrow \mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*$ est continue par définition, mais elle est aussi ouverte, car $\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*$ et $\mathbb{I}_K^0(\infty)$ sont des ouverts de \mathbb{I}_K^0 . D'autre part, la projection $\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^* \rightarrow (\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*)/K^*$

est aussi ouverte et continue (cf. preuve de la Proposition-Définition (13.9)). Ainsi, la composée de ces deux applications est aussi ouverte et continue. D'où, par passage au quotient, un isomorphisme continu et ouvert :

$$\mathbb{I}_K^0(\infty)/(\mathbb{I}_K^0(\infty) \cap K^*) \simeq (\mathbb{I}_K^0(\infty) \cdot K^*)/K^*. \quad (***)$$

On voit facilement que $\mathbb{I}_K^0(\infty) \cap K^* = U_K$ et rappelons que $C_K^0 = \mathbb{I}_K^0/K^*$. En combinant les relations (*), (**) et (***) on a la suite exacte :

$$1 \rightarrow \mathbb{I}_K^0(\infty)/U_K \xrightarrow{\text{continue}} C_K^0 \xrightarrow{\text{continue et ouvert}} I_K/P_K \rightarrow 1.$$

En vertu du lemme précédent, il suffit, pour achever la démonstration, de montrer que

- i) I_K/P_K est compact, mais cela nous le savons car c'est un groupe fini (cf. [Sam, Thm. 2, p.71]) muni de la topologie discrète, donc évidemment compact.
- ii) $\mathbb{I}_K^0(\infty)/U_K$ est compact. Pour cela, nous allons travailler encore un petit peu et utiliser le même lemme avec d'autres homomorphismes. Redéfinissons une vieille connaissance vue au chapitre 1 :

$$l : \mathbb{I}_K^0(\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{r+s}$$

$$(a_p)_p \longmapsto \underbrace{(\log |a_{p_1}|_{p_1}, \dots, \log |a_{p_r}|_{p_r})}_{\text{places réelles}}, \underbrace{(\log |a_{p_{r+1}}|_{p_{r+1}}, \dots, \log |a_{p_{r+s}}|_{p_{r+s}})}_{\text{places complexes}},$$

où r et s sont comme toujours le nombre de plongements réels respectivement complexes de K . L'image de l est $H := \{(x_i) \in \mathbb{R}^{r+s} \mid \sum_{i=1}^{r+s} x_i = 0\}$ et le noyau de l est $\prod_{p \in \mathbb{P}(K)} O_p^*$ qui est compact (en vertu du Lemme de Tychonov). De plus, l'application l est continue et ouverte, car les applications $a + bi \mapsto \sqrt{a^2 + b^2}$, $a \mapsto \log(a)$ sont continues et ouvertes (là où elles sont définies). En passant aux quotients, on obtient une suite exacte :

$$1 \rightarrow \left(\prod_{p \in \mathbb{P}(K)} O_p^* \right) / \left(U_K \cap \prod_{p \in \mathbb{P}(K)} O_p^* \right) \longrightarrow \mathbb{I}_K^0(\infty)/U_K \xrightarrow{\bar{l}} H/l(U_K) \rightarrow 1.$$

comme avant, l'homomorphisme injectif est continu \bar{l} est continu et ouvert. Il s'agit donc de montrer que les groupes "extérieurs" sont compacts. Celui de gauche l'est facilement : U_K est inclu dans K^* qui est discret dans \mathbb{I}_K (cf. Lemme (13.7)), donc U_K est en particulier fermé et alors $\left(\prod_{p \in \mathbb{P}(K)} O_p^* \right) / \left(U_K \cap \prod_{p \in \mathbb{P}(K)} O_p^* \right)$ est compact, puisque c'est un espace compact quotienté par un fermé. Enfin, le théorème de Dirichlet sur les unités nous dit que $l(U_K)$ est un \mathbb{Z} -réseau de rang $n + r - 1 = \dim_{\mathbb{R}}(H)$. Cela implique que $H/l(U_K)$ est compact. Cela prouve le théorème. \neq

Définition (13.18)

Soit K le corps de nombres que nous traînons depuis le début de ce chapitre et $\mathfrak{m} = \prod_{p \in \mathbb{P}(K)} p^{m_p} = \mathfrak{m}_0 \cdot \mathfrak{m}_{\infty}$ un K -module. Soit $b \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{P}(K)$. Souvenons-nous des $U_p^{(b)}$ vus lors de la Définition (11.4). On notera

$$\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} = \prod_{p \in \mathbb{P}(K)} U_p^{(m_p)} \subset \mathbb{I}_K$$

Puisque dans les corps non-archimédiens toute boule fermée est ouverte, $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}}$ est un sous-groupe ouvert de \mathbb{I}_K . Il est clair que $\bigcap_{\mathfrak{m}} \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} = \prod_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(K)} \mathbb{R}_+^* \times \prod_{p \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}(K)} \mathbb{C}^* \times \prod_{p \in \mathbb{P}_0(K)} \{1\}$. Remarquons que l'ensemble

$\{\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \mid \mathfrak{m} \text{ est un } K\text{-module}\}$ est un système fondamental de sous-groupes ouverts : si U est un sous-groupe ouvert de \mathbb{I}_K , alors il existe S un ensemble fini de places contenant les places infinies tel que $U \supset \prod_{\mathfrak{p} \notin S} U_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \in S} V_{\mathfrak{p}}$, où $V_{\mathfrak{p}}$ est un voisinage ouvert de 1 dans $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$. Soit $\mathfrak{p} \in S$. Si \mathfrak{p} est fini, on choisit $m_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $U_{\mathfrak{p}}^{(m_{\mathfrak{p}})} \subset V_{\mathfrak{p}}$. Si \mathfrak{p} est infini complexe, alors on peut prendre $V_{\mathfrak{p}} = \mathbb{C}^*$, car tout sous-groupe ouvert est fermé (vérification facile) et donc, puisque \mathbb{C}^* est connexe, c'est forcément \mathbb{C}^* lui-même; et pour la même raison, si \mathfrak{p} est infini réel, on peut prendre $V_{\mathfrak{p}} = \mathbb{R}_+^*$, ainsi en prenant \mathfrak{m} le K -module contenant toutes les places infinies réelles et dont les $m_{\mathfrak{p}}$ sont ceux donnés plus haut pour les places finies est bien tel que $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \subset U$. Enfin, on voit facilement que si \mathfrak{m}_1 et \mathfrak{m}_2 sont des K -modules, $\mathbb{I}_{\text{pgcd}(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2)} = \mathbb{I}_{\mathfrak{m}_1} \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}_2}$ et que si $\mathfrak{m}_1 \mid \mathfrak{m}_2$, alors $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}_2} \subset \mathbb{I}_{\mathfrak{m}_1}$.

On définit aussi

$$\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} = \{(a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{I}_K \mid a_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}^{(m_{\mathfrak{p}})} \ \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}\}.$$

Il est clair que $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}$ et que $\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}$ est un ouvert de \mathbb{I}_K .

Enfin, on pose

$$C_{\mathfrak{m}} = (\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*)/K^*.$$

Théorème (13.19)

Soit \mathfrak{m} un K -module. Alors on a les isomorphismes de groupes topologiques :

$$\mathbb{I}_K/(\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*) \simeq \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}/(\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K_{\mathfrak{m}}^*) \simeq I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}},$$

où $K_{\mathfrak{m}}^*$, $I_K(\mathfrak{m})$ et $P_{\mathfrak{m}}$ sont les groupes connus de longue date, définis au Chapitre 0, $K_{\mathfrak{m}}^*$ étant bien entendu associé à l'idèle principal correspondant. Le premier de ces isomorphismes est donné par l'inclusion $\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{I}_K$ et le second est donné par l'application $\psi : \mathbb{I}_K \rightarrow I_K$ vue à la preuve du Théorème (13.17) restreinte à $\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}$ qu'on notera désormais $\psi_{\mathfrak{m}}$.

Preuve

L'application

$$\begin{aligned} \psi_{\mathfrak{m}} : \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} &\longrightarrow I_K(\mathfrak{m}) \\ (a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} &\longmapsto \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}})} \end{aligned}$$

est un homomorphisme surjectif. Son noyau est $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}}$ qui est ouvert, donc cet homomorphisme est continu. Il est clair que $P_{\mathfrak{m}}$ est l'image de $K_{\mathfrak{m}}^*$ vu comme idèle principal. Donc, en composant avec la projection $I_K(\mathfrak{m}) \rightarrow I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$, on obtient un homomorphisme surjectif $\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \rightarrow I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$ dont le noyau est $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K_{\mathfrak{m}}^*$ qui est ouvert. On obtient donc le second isomorphisme

$$\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}/(\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K_{\mathfrak{m}}^*) \simeq I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}.$$

Or, c'est une vérification de voir que $K_{\mathfrak{m}}^* = \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cap K^*$. Donc $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K_{\mathfrak{m}}^* = \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot (\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cap K^*) = \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cap (\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*)$. D'où,

$$\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}/(\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K_{\mathfrak{m}}^*) = \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}/(\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cap (\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*)) \stackrel{(*)}{\simeq} \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cdot (\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*)/(\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*) = (\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cdot K^*)/(\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*),$$

l'isomorphisme $(*)$ venant du troisième théorème d'isomorphisme en observant de plus qu'il est continu et ouvert, car $\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}$ est un ouvert dans \mathbb{I}_K , donc dans $\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cdot (\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*)$. Enfin, on montre que $\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cdot K^* = \mathbb{I}_K$.

En effet, soit $(a_p)_p \in \mathbb{I}_K$. Par densité et grâce au théorème d'approximation débile, il existe $\alpha \in K^*$ tel que $\frac{a_p}{\alpha} \equiv 1 \pmod{\widehat{\mathfrak{p}}^{m_p}}$ pour tout $p|m$, ce qui veut dire que $\frac{a_p}{\alpha} \in U_p^{(m_p)}$ pour tout $p|m$ et donc que $(\frac{a_p}{\alpha})_p \in \mathbb{I}'_m$. Et cela prouve le premier isomorphisme :

$$\mathbb{I}'_m/(\mathbb{I}_m \cdot K_m^*) \simeq \mathbb{I}_K/(\mathbb{I}_m \cdot K^*).$$

#

Corollaire (13.20)

Tout sous-groupe ouvert de \mathbb{I}_K contenant K^* doit contenir un \mathbb{I}_m et est nécessairement d'indice fini. De manière similaire, les sous-groupes ouverts de C_K sont ceux qui contiennent un sous-groupe C_m . Il sont tous d'indice fini et pour tout K -module m , on a un isomorphisme

$$C_K/C_m \simeq I_K(m)/P_m.$$

Et réciproquement, si H est un sous-groupe de C_K tel que $H \supset C_m$, alors il est forcément ouvert.

Preuve

Si H est un sous-groupe ouvert de \mathbb{I}_K , on a vu à la Définition (13.18) qu'il existe m un K -module tel que $\mathbb{I}_m \subset H$. Donc, par hypothèse, on a $\mathbb{I}_K \supset H \supset \mathbb{I}_m \cdot K^*$. En utilisant la finitude de $I_K(m)/P_m$ (cf. Théorème (0.12)) et le Théorème (13.19), on conclut que H est d'indice fini dans \mathbb{I}_K . La seconde assertion est évidente au vue du Théorème (13.19) et du deuxième théorème d'isomorphisme (qui préserve la continuité). La dernière assertion est aussi évidente, car si $H \supset C_m$, il est isomorphe à un sous-groupe de $I_K(m)/P_m$ qui est fini avec la topologie discrète, donc forcément ouvert. #

Définition (13.21)

Si H est un sous-groupe ouvert de \mathbb{I}_K contenant K^* , on dit que le K -module m est *admissible pour* H , si $\mathbb{I}_m \subset H$. On vu à la Définition (13.18) qu'un tel m existait toujours. On vérifie facilement que si m et n sont admissibles pour H , alors $\text{pgcd}(m, n)$ est aussi admissible pour H (car on a vu à la Définition (13.18) que $\mathbb{I}_{\text{pgcd}(m, n)} = \mathbb{I}_m \cdot \mathbb{I}_n$). Il existe donc un K -module f (appelé le *conducteur de* H) tel que

$$m \text{ est admissible pour } H \iff m \text{ divise } f.$$

On rappelle les applications

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{I}_K &\longrightarrow I_K & \psi_m = \psi|_{\mathbb{I}'_m} : \mathbb{I}'_m &\longrightarrow I_K(m) \\ a = (a_p)_p &\longmapsto \prod_{p \in \mathbb{P}_0(K)} p^{v_p(a_p)} & \text{et} & & (a_p)_p &\longmapsto \prod_{p \in \mathbb{P}_0(K)} p^{v_p(a_p)}. \end{aligned}$$

Soit H comme ci-dessus et m un K -module admissible pour H . On pose

$$H(m) = \psi(H \cap \mathbb{I}'_m).$$

Cette notation est la même que celle définissant le sous-groupe de congruence défini pour m . Ce n'est pas un hasard :

Théorème (13.22)

Soit K un corps de nombres. Alors l'application

$$H \longmapsto \{H(\mathfrak{m}) \mid \mathfrak{m} \text{ est admissible pour } H\}$$

est une bijection de l'ensemble des sous-groupes ouverts de \mathbb{I}_K contenant K^* sur l'ensemble des classes d'équivalence de sous-groupes de congruences (voir Chapitre 8 pour les définitions). En outre, le conducteur de H est égal au conducteur (au sens du Corollaire-Définitions (8.5)) de la classe de sous-groupes de congruence correspondante. Enfin, on a encore l'égalité $\mathbb{I}_K/H \simeq I_K(\mathfrak{m})/H(\mathfrak{m})$.

Preuve

Soit H un sous-groupe ouvert de \mathbb{I}_K contenant K^* et \mathfrak{m} un K -module admissible pour H . Il y a bijection entre les sous-groupes ouverts de \mathbb{I}_K qui contiennent $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*$ et les sous-groupes ouverts de $\mathbb{I}_K/(\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*)$ qui sont en bijection, par le Théorème (13.19), avec les sous-groupes ouverts de $I_K(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}}$, qui correspondent eux-même aux ouverts (pour la topologie discrète) de $I_K(\mathfrak{m})$ qui contiennent $P_{\mathfrak{m}}$. Ces bijections étant données par ψ et l'inclusion, on a donc que $P_{\mathfrak{m}} \subset H(\mathfrak{m}) \subset I_K(\mathfrak{m})$. Plus précisément, la réciproque de l'application $H \mapsto H(\mathfrak{m})$ est l'application $H' \mapsto \psi_{\mathfrak{m}}^{-1}(H') \cdot K^*$. En effet, $\psi_{\mathfrak{m}}^{-1}(H(\mathfrak{m})) \cdot K^* = \psi_{\mathfrak{m}}^{-1}(\psi_{\mathfrak{m}}(H \cap \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}})) \cdot K^* = (H \cap \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}) \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^* = H$. La dernière égalité se montre en utilisant que $\mathbb{I}_K = \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cdot K^*$ et que $H \supset \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*$. Réciproquement, on voit que $\psi_{\mathfrak{m}}((\psi_{\mathfrak{m}}^{-1}(H') \cdot K^*) \cap \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}) = H'$, car $K^* \cap \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} = K_{\mathfrak{m}}^*$ et que $\psi_{\mathfrak{m}}(K_{\mathfrak{m}}^*) = P_{\mathfrak{m}} \subset H'$. Cela montre que $H(\mathfrak{m})$ est un sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m} (au sens de la Définition (8.1)). On a donc un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{I}_K & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} & \xrightarrow{\psi_{\mathfrak{m}}} & I_K(\mathfrak{m}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 H & \xleftarrow{\quad} & H \cap \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} & \xrightarrow{\quad} & H(\mathfrak{m}) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^* & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K_{\mathfrak{m}}^* & \xrightarrow{\quad} & P_{\mathfrak{m}}
 \end{array}$$

En observant ce diagramme, on remarque aisément (grâce au premier théorème d'isomorphisme) que $\mathbb{I}_K/H \simeq I_K(\mathfrak{m})/H(\mathfrak{m})$ et que tout sous-groupe de congruence (pour K) est de la forme $H(\mathfrak{m})$ pour un H et un \mathfrak{m} adéquat. De plus, pour les même raisons, si H_1 et H_2 sont des sous-groupes ouverts de \mathbb{I}_K contenant $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*$, alors $H_1(\mathfrak{m}) = H_2(\mathfrak{m})$ implique que $H_1 = H_2$ (*).

Supposons que \mathfrak{m} et \mathfrak{m}' soient admissibles pour H . Alors $H(\mathfrak{m})$ et $H(\mathfrak{m}')$ sont équivalents (au sens de la Définition (8.2)). En effet, on peut supposer sans limiter la généralité en passant par le pgcd, que $\mathfrak{m}|\mathfrak{m}'$ (dans ce cas, il est clair que $\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}'} \subset \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}$). Alors on a :

$$H(\mathfrak{m}') = \psi(\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}'} \cap H) = \psi((\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cap H) \cap \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}'}) \stackrel{(**)}{=} \psi(\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}} \cap H) \cap \psi(\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}'}) = H(\mathfrak{m}) \cap I_K(\mathfrak{m}'), \quad (***)$$

ce qui montre que $H(\mathfrak{m})$ et $H(\mathfrak{m}')$ sont équivalents. L'égalité (**) vient du résultat suivant : si $A, B \subset G$, G est un groupe, A un sous-groupe de G , f un homomorphisme défini sur G tel que $\ker(f|G) \subset A$, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. L'inclusion \subset est toujours vraie et triviale. Réciproquement, soit $z \in f(A) \cap f(B)$.

Alors il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $f(x) = f(y) = z$, ce qui veut dire que $x^{-1} \cdot y \in \ker(f) \subset A$, et donc $y = x \cdot (x^{-1}y) \in A$.

Enfin, pour achever la preuve du théorème, il faut encore voir la chose suivante : soit H_1, H_2 des sous-groupes ouverts de \mathbb{I}_K contenant K^* , et $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$, des K -modules admissibles pour H_1 et H_2 respectivement, alors on a

$$H_1 = H_2 \iff H_1(\mathfrak{m}_1) \sim H_2(\mathfrak{m}_2),$$

où \sim est l'équivalence des sous-groupes de congruences. En effet, soit \mathfrak{m} un multiple commun de \mathfrak{m}_1 et de \mathfrak{m}_2 . La relation $(***)$ montre que $H_1(\mathfrak{m}_1) \sim H_1(\mathfrak{m})$ et $H_2(\mathfrak{m}_2) \sim H_2(\mathfrak{m})$. Ainsi

$$H_1(\mathfrak{m}_1) \sim H_2(\mathfrak{m}_2) \iff H_1(\mathfrak{m}) \sim H_2(\mathfrak{m}) \stackrel{\text{cor-def(8.5)}}{\sim} H_1(\mathfrak{m}) = H_2(\mathfrak{m}) \stackrel{(*)}{\iff} H_1 = H_2.$$

##

Nous pouvons maintenant énoncer la première version de la version idélique du corps de classe :

Corollaire (13.23)

Soit K un corps de nombres. Alors il existe une bijection entre l'ensemble des sous-groupes ouverts H de \mathbb{I}_K contenant K^* et l'ensemble des extensions abéliennes L de K (contenus dans une même clôture algébrique). On a en outre une bijection entre le groupe de Galois $\text{Gal}(L/K)$ et \mathbb{I}_K/H .

Preuve

C'est un corollaire immédiat du théorème précédent et du Théorème (10.1).

##

Nous allons maintenant préciser encore un peu de quelle nature est cette bijection.

Définition (13.24)

Soit L/K une extension de corps de nombres. Si $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$, on note $\mathbb{I}_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} \mathbb{I}_{\mathfrak{q}}$. Alors on peut voir \mathbb{A}_L comme le produit réduit des $\mathbb{I}_{\mathfrak{p}}$ par rapport aux $\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$ (\mathfrak{p} fini). De même, \mathbb{I}_L peut être vu comme le produit des $\mathbb{I}_{\mathfrak{p}}^* = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} \mathbb{I}_{\mathfrak{q}}^*$ par rapport aux $\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{\mathfrak{q}}$ (\mathfrak{p} finis). En fait, on regroupe par “paquets”. On définit entre \mathbb{I}_L et \mathbb{I}_K une norme qu'on note encore $N_{L/K}$:

$$N_{L/K} : \mathbb{I}_L \longrightarrow \mathbb{I}_K$$

$$x = (x_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(L)} \longmapsto N_{L/K}(x) = y = (y_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)}$$

tel que pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ on ait $y_{\mathfrak{p}} = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} N_{\mathbb{I}_{\mathfrak{q}}/\mathbb{I}_{\mathfrak{p}}}(x_{\mathfrak{q}})$.

Si $x \in L^*$, il est bien connu que pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$, on a $N_{L/K}(x) = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}} N_{\mathbb{I}_{\mathfrak{q}}/\mathbb{I}_{\mathfrak{p}}}(x)$ (cf. [Fr-Tay, Ch. III, 1.10,p.110]). Cela montre que le premier carré est commutatif (l'autre l'est plus trivialement) :

$$\begin{array}{ccc} L^* & \hookrightarrow & \mathbb{I}_L \\ N_{L/K} \downarrow & & \downarrow N_{L/K} \\ K^* & \hookrightarrow & \mathbb{I}_K \end{array} \quad \begin{array}{ccc} L^* & \hookrightarrow & \mathbb{I}_L \\ \text{incl.} \uparrow & & \uparrow \text{incl.} \\ K^* & \hookrightarrow & \mathbb{I}_K \end{array}$$

Enfin, puisque $N_{L/K}(L^*) \subset K^*$, $N_{L/K}$ induit un homomorphisme de $C_L \rightarrow C_K$ qu'on note encore $N_{L/K}$.

Lemme (13.25)

Soit L/K une extension de corps de nombres. Alors le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{I}_L & \xrightarrow{\psi} & I_L \\ N_{L/K} \downarrow & & \downarrow N_{L/K} \\ \mathbb{I}_K & \xrightarrow{\psi} & I_K \end{array}$$

Il commute ainsi :

$$\begin{array}{ccc} (x_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\psi} & \prod_{\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L)} \mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{P}}(x_{\mathfrak{P}})} \\ N_{L/K} \downarrow & & \downarrow N_{L/K} \\ \left(\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(x_{\mathfrak{P}}) \right)_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow{\psi} & \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathfrak{p}^{\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} v_{\mathfrak{P}}(N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(x_{\mathfrak{P}}))} \end{array}$$

Et la flèche en traitillé est bien définie

Preuve

A priori la flèche en traitillé est $\prod_{\mathfrak{P} \in \mathbb{P}_0(L)} \mathfrak{P}^{v_{\mathfrak{P}}(x_{\mathfrak{P}})} \mapsto \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathfrak{p}^{\sum_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})v_{\mathfrak{P}}(x_{\mathfrak{P}})}$.

Donc, la seule chose qu'il faut voir est que pour tout $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$, on a

$$v_{\mathfrak{p}}(N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(x)) = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cdot v_{\mathfrak{P}}(x)$$

pour tout $x \in L_{\mathfrak{P}}^*$. On rappelle que $x = \pi^k \cdot u$, où π est une uniformisante, $k \in \mathbb{Z}$ et $u \in U_{\mathfrak{P}}$. Par multiplicativité de la norme, il suffit de voir le résultat pour u et π^k séparément. Pour u , il est clair que $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}}) \subset U_{\mathfrak{p}}$ et que $v_{\mathfrak{P}}(u) = 0$, donc les deux membres de l'égalité valent 0. Enfin, $v_{\mathfrak{p}}(N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\pi^k)) = v_{\mathfrak{p}}(N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\pi^k) \cdot O_{\mathfrak{p}}) = v_{\mathfrak{p}}(N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\pi \cdot O_{\mathfrak{P}})^k) = v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p}^{f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cdot k}) = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cdot k = f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \cdot v_{\mathfrak{P}}(\pi^k)$. #

Proposition (13.26)

Si L/K est une extension abélienne de corps de nombres, il existe un K -module \mathfrak{m} tel que

$$N_{L/K}(\mathbb{I}_L) \supset \mathbb{I}_{\mathfrak{m}}.$$

Il est évident que tout multiple de \mathfrak{m} fait aussi l'affaire. Cela implique que $N_{L/K}(\mathbb{I}_L)$ est un ouvert de \mathbb{I}_K (car alors $N_{L/K}(\mathbb{I}_L) = \bigcup_{x \in N_{L/K}(\mathbb{I}_L)} x \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}}$).

Preuve

Il suffit de trouver un K -module \mathfrak{m} tel que pour chaque $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$, il existe $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ tel que $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{I}_{\mathfrak{P}}) \supset U_{\mathfrak{p}}^{(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}))}$ (pour les autres $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$, on pose 1) et $N_{L_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}}) \supset U_{\mathfrak{p}}^{(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}))}$ ppt les \mathfrak{p} et les $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$. On sait que si \mathfrak{p} est non ramifié, alors $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(U_{\mathfrak{P}}) = U_{\mathfrak{p}}$ (Lemme (11.16)). Pour les places ramifiées (qui sont en

nombre fini, notons R l'ensemble de ces places) la Proposition (5.11) montre que si m est assez grand, $N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{P}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}) \supset U_{\mathfrak{P}}^{(m)}$ (pour les places infinies, il suffit de prendre $m = 1$). On choisit donc pour \mathfrak{m} un K -module $\prod_{\mathfrak{p} \in R} \mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}$ avec $m_{\mathfrak{p}} > 0$ et suffisamment grand si \mathfrak{p} est fini. \neq

Définition (13.27)

Soit L/K une extension de corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module. On note

$$\mathbb{I}_L''(\mathfrak{m}) = \{(a_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}} \in \mathbb{I}_L \mid a_{\mathfrak{P}} = 1 \ \forall \mathfrak{P} \text{ tel que } \mathfrak{P} \nmid \tilde{\mathfrak{m}}\}$$

Rappelons que $\tilde{\mathfrak{m}}$ a été défini à la page 12.

Lemme (13.28)

Soit L/K une extension de corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module. Alors on a les égalités :

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))) &= K_{\mathfrak{m}}^* \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L''(\mathfrak{m})) \\ K^* \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L''(\mathfrak{m})) &= K^* \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L). \end{aligned}$$

Preuve

Pour la première égalité.

Montrons “ \supset ”. On sait que $\psi(K_{\mathfrak{m}}^*) = P_{\mathfrak{m}}$ et $\psi(\mathbb{I}_{\mathfrak{m}}) = 1$. D'autre part, $\psi(N_{L/K}(\mathbb{I}_L''(\mathfrak{m}))) \stackrel{\text{Lemme (13.25)}}{=} N_{L/K}(\psi(\mathbb{I}_L''(\mathfrak{m}))) \subset N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$ (la dernière inclusion est évidente).

Montrons “ \subset ”. Soit $a \in \psi^{-1}(P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}})))$. Alors $\psi(a) = (\alpha) \cdot N_{L/K}(\mathfrak{a})$, avec $\alpha \in K_{\mathfrak{m}}^*$ et $\mathfrak{a} \in I_L(\tilde{\mathfrak{m}})$. Soit $A = (A_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}} \in \mathbb{I}_L''(\mathfrak{m})$ tel que $A_{\mathfrak{P}} = 1$ si \mathfrak{P} est infini ou si $\mathfrak{P} \nmid \mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{a}$, on choisit $A_{\mathfrak{P}}$ tel que $v_{\mathfrak{P}}(A_{\mathfrak{P}}) = v_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{a})$. Ainsi, $\psi(A) = \mathfrak{a}$ et $\psi(N_{L/K}(A)) = N_{L/K}(\psi(A)) = N_{L/K}(\mathfrak{a})$. Donc, $\psi(\alpha \cdot N_{L/K}(A)) = (\alpha) \cdot N_{L/K}(\mathfrak{a}) = \psi(a)$. Donc, $a^{-1} \cdot \alpha \cdot N_{L/K}(A) \in \ker(\psi_{\mathfrak{m}}) = \mathbb{I}_{\mathfrak{m}}$.

Pour la seconde égalité, “ \subset ” est triviale. Pour “ \supset ”, il suffit de montrer que $N_{L/K}(\mathbb{I}_L) \subset K^* \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L''(\mathfrak{m}))$. Soit $b = (b_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}} \in \mathbb{I}_L$. Pour tout $x \in L^*$ (plongé diagonalement dans \mathbb{I}_L), on a $N_{L/K}(b) = N_{L/K}(x) \cdot N_{L/K}(b \cdot x^{-1})$. Ecrivons $b \cdot x^{-1} = b' \cdot b''$, où $b' = (b'_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}} \in \mathbb{I}_L''(\mathfrak{m})$ et $b'' = (b''_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}}$, avec $b'_{\mathfrak{P}} = \begin{cases} b_{\mathfrak{P}} \cdot x^{-1} & \text{si } \mathfrak{P} \nmid \tilde{\mathfrak{m}} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ et $b''_{\mathfrak{P}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathfrak{P} \nmid \tilde{\mathfrak{m}} \\ b_{\mathfrak{P}} \cdot x^{-1} & \text{sinon} \end{cases}$. Et donc

$$N_{L/K}(b) = \underbrace{N_{L/K}(x)}_{\in K^*} \cdot \underbrace{N_{L/K}(b')}_{\in N_{L/K}(\mathbb{I}_L''(\mathfrak{m}))} \cdot N_{L/K}(b'').$$

Maintenant, il s'agit de choisir x de sorte que $N_{L/K}(b'') \in \mathbb{I}_{\mathfrak{m}}$. Or, puisque $N_{L/K}(b'')_{\mathfrak{p}} = 1$ si $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{m}$, il suffit de demander que $N_{L/K}(b'')_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}^{(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}))}$ si $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$, c'est-à-dire $N_{L/K}(b''_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}^{(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}))}$ si $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$. Ceci est réalisé si $x \equiv b_{\mathfrak{P}} \pmod{\widehat{\mathfrak{P}}^m}$ pour m assez grand, si $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}$. Mais cela est vrai par densité et en vertu du théorème d'approximation débile (Théorème (0.3)). \neq

On peut maintenant énoncer le théorème principal du corps de classe un peu plus affinée que le Corollaire (13.23).

Théorème (13.29)

Soit K un corps de nombres. On a une correspondance bijective entre les extensions abéliennes de K et les sous-groupes ouverts de \mathbb{I}_K contenant K^* . Cette correspondance est donnée par

$$L/K \longmapsto K^* \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L).$$

En passant aux classes, on peut dire la même chose en disant que les extensions abéliennes de K sont en correspondance bijective avec les sous-groupes ouverts de C_K via $L/K \mapsto N_{L/K}(C_L)$. En outre on a des isomorphismes

$$C_K/N_{L/K}(C_L) \simeq \mathbb{I}_K/(K^* \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L)) \simeq \text{Gal}(L/K),$$

obtenus en composant les isomorphismes

$$\mathbb{I}_K/(K^* \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L)) \simeq I_K(\mathfrak{m})/(P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))) \stackrel{\text{Artin}}{\simeq} \text{Gal}(L/K).$$

Preuve

Si L/K est une extension abélienne, on considère $\mathbb{H} = \mathbb{H}(L/K)$ la classe d'équivalence de cette extension. Choisissons \mathfrak{m} , un K -module admissible. Le noyau de l'application d'Artin est le sous-groupe de congruence pour \mathfrak{m} et il est égal à $P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))$ (cf. Lemme (7.2)). On a vu lors de la preuve du Théorème (13.22) que le sous-groupe ouvert de \mathbb{I}_K associé à ce sous-groupe de congruence était $\psi^{-1}(P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))) \cdot K^*$. En vertu du lemme précédent (13.28), on a alors :

$$\begin{aligned} \psi^{-1}(P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))) \cdot K^* &= \underbrace{K^* \cdot K_{\mathfrak{m}}^*}_{=K^*} \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L'(\mathfrak{m})) \\ &= K^* \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L) \\ &= K^* \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait qu'en prenant un multiple adéquat de \mathfrak{m} , on peut supposer que $\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \subset N_{L/K}(\mathbb{I}_L)$ (cf. Proposition (13.26)), et il reste évidemment admissible.

Réciproquement, si H est un sous-groupe ouvert de \mathbb{I}_K contenant K^* , il lui correspond (en vertu du Théorème (13.22)), une classe d'équivalence de sous-groupes de congruences, qui lui fait correspondre un corps de classe L (Théorème (10.1)), et en “revenant” comme à la première partie, on voit que $H = K^* \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L)$. La dernière partie est évidente au vu de ce qui précède. \neq

Pour terminer la partie idélique de cette théorie, nous allons chercher une description “directe” de l'homomorphisme $\Upsilon : \mathbb{I}_K \rightarrow \text{Gal}(L/K)$. qui engendre l'isomorphisme $\mathbb{I}_K/(K^* \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L)) \simeq \text{Gal}(L/K)$.

Définition (13.30)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres et \mathfrak{p} une place non complexe de K . Souvenons-nous de l'application $\theta_{\mathfrak{p}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \rightarrow Z(\mathfrak{p}) \subset \text{Gal}(L/K)$ vue lors de la Définition (11.6). On pose

$$\begin{aligned} \Upsilon : \mathbb{I}_K &\longrightarrow \text{Gal}(L/K) \\ (a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} &\longmapsto \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \theta_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}}). \end{aligned}$$

Pour presque tout \mathfrak{p} , \mathfrak{p} est non ramifié et $a_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}$. Donc (Lemme (11.16)) $a_{\mathfrak{p}} \in N_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{I}_{\mathfrak{p}}) \stackrel{\text{Cor. (11.12)}}{\subset} \ker(\theta_{\mathfrak{p}})$, donc $\theta_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}}) = 1$, donc Υ est bien définie. C'est un homomorphisme, car chaque $\theta_{\mathfrak{p}}$ l'est.

Lemme (13.31)(réciprocité pour le symbole des restes normiques)

Les idèles principaux $K^* \subset \ker(\Upsilon)$, i.e. si $x \in K^*$,

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \theta_{\mathfrak{p}}(x) = 1.$$

Preuve

Posons S l'ensemble des places qui ramifient ou qui divisent x . Alors $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \theta_{\mathfrak{p}}(x) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \theta_{\mathfrak{p}}(x)$. Supposons $S = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t, \mathfrak{p}_{t+1}, \dots, \mathfrak{p}_s\}$, où $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_t$ sont des places finies et $\mathfrak{p}_{t+1}, \dots, \mathfrak{p}_s$ sont des places infinies réelles. Supposons que $(x) = \prod_{i=1}^t \mathfrak{p}_i^{a_i}$. Soit \mathfrak{m} un K -module admissible pour L/K avec $\mathfrak{m} = \prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i^{t_i}$ tel que $a_i \leq t_i$ pour tout $i = 1, \dots, t$ (c'est toujours possible en vertu du théorème de réciprocité d'Artin (7.14)). On a $\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \theta_{\mathfrak{p}}(x) = \prod_{i=1}^s \theta_{\mathfrak{p}_i}(x)$, et pour chaque i , on a $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}_i^{t_i} \cdot \mathfrak{m}_i$ ($\mathfrak{p}_i \nmid \mathfrak{m}_i$ et \mathfrak{m} est \mathfrak{p}_i -admissible. Pour chaque i , on peut choisir en vertu du Théorème d'approximation débile (0.3) $y_i \in K^*$ $y_i \equiv x \pmod{\mathfrak{p}_i^{t_i}}$ et $y_i \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_i}$. On a donc (cf. Remarque précédant la Proposition (11.8)) $\theta_{\mathfrak{p}_i}(x) = \Phi_{L/K}(j_{\mathfrak{m}}((y_i)))$ (avec l'abus habituel $\Phi_{L/K} = \Phi_{L/K}|_{I_K(\mathfrak{m})}$). Remarquons que $x^{-1}y_1 \dots y_s \in K_{\mathfrak{m}}^*$ et que $(y_i) = \begin{cases} \mathfrak{p}_i^{a_i} \cdot \mathfrak{a}_i & \text{avec } \mathfrak{a}_i \text{ premier à } \mathfrak{m} \text{ pour } i = 1, \dots, t \\ \mathfrak{a}_i & \text{avec } \mathfrak{a}_i \text{ premier à } \mathfrak{m} \text{ pour } i = t+1, \dots, s \end{cases}$. Ainsi, $j_{\mathfrak{m}}((y_i)) = \mathfrak{a}_i$, pour tout $i = 1, \dots, s$. Enfin,

$$\begin{aligned} \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \theta_{\mathfrak{p}}(x) &= \prod_{i=1}^s \Phi_{L/K}(\mathfrak{a}_i) = \Phi_{L/K} \left(\prod_{i=1}^s \mathfrak{a}_i \right) \\ &= \Phi_{L/K} \left(\frac{(y_1 \dots y_s)}{\prod_{i=1}^t \mathfrak{p}_i^{a_i} = (x)} \right) = \Phi_{L/K}(\underbrace{(x^{-1}y_1 \dots y_s)}_{\in P_{\mathfrak{m}}}) = 1. \end{aligned}$$

#

Théorème (13.32)

Soit L/K une extension abélienne de corps de nombres et \mathfrak{m} un K -module admissible pour L/K . Alors l'application $\Upsilon : \mathbb{I}_K \rightarrow \text{Gal}(L/K)$ $(a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \mapsto \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \theta_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}})$ induit un isomorphisme de $\mathbb{I}_K/(K^* \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L)) \rightarrow \text{Gal}(L/K)$, obtenu en composant les homomorphismes :

$$\mathbb{I}_K \rightarrow \mathbb{I}_K/(K^* \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}_L)) \simeq \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}/(K_{\mathfrak{m}}^* \cdot \mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(\mathbb{I}''_L(\mathfrak{m}))) \simeq I_K(\mathfrak{m})/(P_{\mathfrak{m}} \cdot N_{L/K}(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))) \xrightarrow{\frac{1}{\Phi_{L/K}}} \text{Gal}(L/K).$$

Vous aurez remarqué que pour la dernière flèche, on a pris $\frac{1}{\Phi_{L/K}}$ au lieu de $\Phi_{L/K}$.

Preuve

On a $\Upsilon((a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}) = 1$ si $(a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in N_{L/K}(\mathbb{I}_L)$, car alors $a_{\mathfrak{p}} \in N_{L_{\mathfrak{p}}/K_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{I}_{\mathfrak{p}}) = \ker(\theta_{\mathfrak{p}})$ pour tout \mathfrak{p} et $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ (Théorème (11.14)). De même si $(a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} = x \in K^*$ (lemme précédent (13.31)) et puisque le premier isomorphisme est induit par l'injection, il suffit de vérifier l'assertion pour un $a = (a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}$. Alors $\Upsilon((a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}) = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \theta_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}}) = \prod_{\mathfrak{p} \in S} \theta_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}})$, où S est l'ensemble fini des \mathfrak{p} tels que $\theta_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}}) \neq 1$. Ces \mathfrak{p} -là sont non ramifiés. En effet, si \mathfrak{p} est ramifié, alors $\mathfrak{p}|\mathfrak{m}$. Or, $a \in \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}$, donc $a \in U_{\mathfrak{p}}^{(v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m}))} \subset \ker(\theta_{\mathfrak{p}})$ au vu de la définition des $\theta_{\mathfrak{p}}$ (Définition (11.6)) et de la Remarque b) qui suit ($b = a = v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{m})$). Par multiplicativité, il suffit de prouver le résultat lorsque $a = (a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$ est tel que $a_{\mathfrak{p}} = 1$ sauf si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_0$ non ramifié. Dans ce cas, $\Upsilon(a) = \theta_{\mathfrak{p}_0}(a_{\mathfrak{p}_0}) \stackrel{\text{Prop. (11.8)}}{=} \text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p}_0)^{-v_{\mathfrak{p}_0}(a_{\mathfrak{p}_0})}$. Et d'autre part, en suivant la suite d'applications de l'énoncé du théorème, on a $(a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \mapsto \Phi_{L/K}(\psi((a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}))^{-1} = \Phi_{L/K}(\mathfrak{p}_0^{v_{\mathfrak{p}_0}(a_{\mathfrak{p}_0})})^{-1} = \text{Frob}_{L/K}(\mathfrak{p}_0)^{-v_{\mathfrak{p}_0}(a_{\mathfrak{p}_0})}$. Cela montre le théorème.

#

Chapitre 14 :

Corps de classe local

La théorie du corps de classe se démontre maintenant assez facilement, en utilisant notamment les résultats sur $\theta_{\mathfrak{p}}$, le symbole de norme résiduel, vus au Chapitre 11. Pour fixer les idées, nous allons donner une définition pour nous mettre d'accord sur la notion de corps locaux (pas comme ce coquin de Serre qui fait un livre dessus et qui ne prend même pas la peine de dire ce que c'est...)

Définition (14.1)

On appellera *corps local* l'un des corps suivant :

$$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \text{ toute extension finie d'un corps } \mathbb{Q}_p$$

(en fait il s'agit de la liste complète des corps topologiques localement compacts (non discrets) de caractéristique 0). Pour simplifier, on notera $\|\cdot\|$ la valeur absolue du corps local considéré. Il est évident que si K est un corps de nombres et $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$, alors $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ est un corps local. On a mieux :

Théorème (14.2)

Si \mathbb{K} est un corps local, alors il existe un corps de nombres K et \mathfrak{p} une place de K tels que $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$.

Preuve

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} , c'est évident. On aura besoin de 3 lemmes et d'une définitions pour prouver ce résultat dans le cas non archimédien.

Lemme (14.3)(Lemme de Krasner)

Soit \mathbb{K} un corps local non archimédien, \mathbb{K}^{alg} une clôture algébrique de \mathbb{K} et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}^{\text{alg}}$. Notons $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les conjuguées de α sur K . Supposons que $\|\alpha - \beta\| < \|\alpha_i - \beta\| \forall i = 2, \dots, n$. Alors $\mathbb{K}(\alpha) \subset \mathbb{K}(\beta)$.

Preuve

Supposons d'abord connu le résultat suivant : si \mathbb{L}/\mathbb{K} est une extension algébrique de corps locaux, alors la valeur absolue de \mathbb{K} se prolonge de manière unique sur \mathbb{L} par la formule

$$\forall \gamma \in \mathbb{L} \quad \|\gamma\| = \|N_{\mathbb{K}(\gamma)/\mathbb{K}}(\gamma)\|^{\frac{1}{[\mathbb{K}(\gamma):\mathbb{K}]}} \quad (*)$$

(cf. [Fr-Tay, 1.15, p.113]) ce qui implique que si γ_1 et $\gamma_2 \in \mathbb{L}$ sont conjugués (i.e. $m_{\gamma_1/\mathbb{K}} = m_{\gamma_2/\mathbb{K}}$), alors $\|\gamma_1\| = \|\gamma_2\|$.

Prouvons maintenant le lemme. Supposons par l'absurde que $\alpha \notin \mathbb{K}(\beta)$. Alors le polynôme minimal de α sur $\mathbb{K}(\beta)$ est de degré > 1 et divise le polynôme minimal de α sur \mathbb{K} . Il admet donc parmi ses racines un α_{i_0} pour un $i > 1$. Ainsi, α et α_{i_0} sont conjugués sur $\mathbb{K}(\beta)$ et donc $\beta - \alpha$ et $\beta - \alpha_{i_0}$ sont aussi

conjugués sur $\mathbb{K}(\beta)$ (car le changement de variable $x \mapsto -x + \beta$ est unimodulaire). Par l'égalité (*), on a donc que $\|\beta - \alpha\| = \|\beta - \alpha_{i_0}\|$, contredisant l'hypothèse. $\#$

Lemme (14.4)

Soit \mathbb{K} un corps local non archimédien, $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ et α une racine de f dans une extension de \mathbb{K} . Alors on a :

$$\|\alpha\| \leq \max(1, \|a_0\|, \dots, \|a_{n-1}\|).$$

Preuve

Supposons *ab absurdo* que $\|\alpha\| > \max(1, \|a_0\|, \dots, \|a_{n-1}\|)$. Alors

$$\left\| \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \alpha^i \right\| \leq \max_{0 \leq i \leq n-1} (\|a_i\| \cdot \|\alpha\|^i) < \|\alpha\| \cdot \|\alpha\|^{n-1} = \|\alpha\|^n.$$

Cela montre que $0 \neq \alpha^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot \alpha^i = f(\alpha) = 0$. C'est une contradiction. $\#$

Définition (14.5)

Soit $f = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \in \mathbb{K}[x]$, $n \geq 1$. On définit $\|f\| = \max_{i=0}^n (\|a_i\|)$. On vérifie facilement que c'est une norme sur $\mathbb{K}[x]$.

Lemme (14.6)(Lemme de continuité des racines)

Soit \mathbb{K} un corps local non archimédien, \mathbb{K}^{alg} une clôture algébrique de \mathbb{K} , $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{K}[x]$ un polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[x]$. Soit encore $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines de f dans \mathbb{K}^{alg} qui sont bien sûr toutes distinctes, car on est en caractéristique 0. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $g = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{K}[x]$ satisfaisant $\|f - g\| < \delta$, alors g admet une racine β telle que $\|\alpha - \beta\| < \varepsilon$.

Remarquons qu'en prenant δ encore plus petit, on peut avoir le résultat pour tout α_i .

Preuve

On peut supposer que $2 \cdot \varepsilon < \rho := \min_{i \neq j} \|\alpha_i - \alpha_j\|$. On va chercher un $\delta < 1$ satisfaisant la conclusion. Pour tout $g = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 \in \mathbb{K}[x]$ satisfaisant $\|f - g\| < \delta < 1$ et pour tout μ racine de g , on aura

$$\begin{aligned} \|\mu\| &\stackrel{\text{Lem. (14.4)}}{\leq} \max(1, \|b_0\|, \dots, \|b_{n-1}\|) \\ &\leq \max(1, \|a_0\| + 1, \dots, \|a_{n-1}\| + 1) \\ &\leq \|f\| + 1 \end{aligned} \tag{*}$$

qui est indépendant de g, β et δ (< 1). Avec ces hypothèses sur g, β et δ , on a encore :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n \|\mu - \alpha_i\| &= \left\| \prod_{i=1}^n (\mu - \alpha_i) \right\| = \|f(\mu)\| \\ &= \|f(\mu) - g(\mu)\| = \left\| \sum_{i=0}^{n-1} (a_i - b_i) \cdot \mu^i \right\| \\ &\leq \|f - g\| \cdot \max_{0 \leq i \leq n-1} \|\mu\|^i \\ &\leq \|f - g\| \cdot \max(1, \|\mu\|^{n-1}) \leq \delta \cdot \max(1, \|\mu\|)^{n-1} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \delta \cdot (\|f\| + 1)^{n-1} \end{aligned}$$

Si δ est suffisamment petit, alors $\delta \cdot (\|f\| + 1)^{n-1} < \varepsilon^n$. Donc, il existe i tel que

$$\|\mu - \alpha_i\| < \varepsilon, \quad (**)$$

et cet i est unique. En effet, s'il existe un autre j , on aura $\|\alpha_i - \alpha_j\| \leq \|\mu - \alpha_i\| + \|\mu - \alpha_j\| < 2 \cdot \varepsilon < \rho = \min_{i \neq j} \|\alpha_i - \alpha_j\|$, ce qui est impossible. Mais hélas, notre α_i , n'est peut-être pas α .

Soit \mathbb{L}/\mathbb{K} une extension galoisienne finie de \mathbb{K} qui contient les α_i et μ . Soit $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ tel que $\sigma(\alpha_i) = \alpha$ (σ existe, car f est irréductible). On trouve enfin

$$\|\sigma(\mu) - \sigma(\alpha_i)\| = \|N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\sigma(\mu - \alpha_i))\|^{\frac{1}{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]}} = \|N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mu - \alpha_i)\|^{\frac{1}{[\mathbb{L}:\mathbb{K}]}} = \|\mu - \alpha_i\| < \varepsilon$$

et enfin, $\beta := \sigma(\mu)$ est une racine de g et satisfait la conclusion de notre lemme. #

Remarque

Ce résultat est vrai aussi en caractéristique positive, de même si f n'est pas irréductible, mais la preuve est un poil plus longue.

Fin de la preuve du Théorème (14.2)

Soient α tel que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p(\alpha)$, $f = m_{\alpha/\mathbb{Q}_p}$ le polynôme minimal de α , $n = [\mathbb{K} : \mathbb{Q}_p]$ le degré de f , $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les racines de f dans une clôture algébrique de \mathbb{K} . Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \min_{i \neq j} \|\alpha_i - \alpha_j\|$ et soit $\delta > 0$ comme dans l'énoncé du lemme précédent (Lemme (14.6)). Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{Q}_p , il existe un polynôme $g \in \mathbb{Q}[x]$ unitaire de degré n tel que $\|f - g\| < \delta$. Par le lemme précédent (Lemme (14.6)), g a une racine β telle que $\|\alpha - \beta\| < \varepsilon$. On prétend que $\|\beta - \alpha_i\| > \|\beta - \alpha\|$ si $i = 2, \dots, n$. En effet, sinon on aurait $\|\alpha - \alpha_i\| \leq \max(\|\alpha - \beta\|, \|\beta - \alpha_i\|) = \|\alpha - \beta\| < \varepsilon$, ce qui est contraire au choix de ε . Par le Lemme de Krasner (Lemme (14.3)), on a $\mathbb{Q}_p(\beta) \supset \mathbb{Q}_p(\alpha) = \mathbb{K}$. Mais, on a $[\mathbb{Q}_p(\beta) : \mathbb{Q}_p] \leq \deg(g) = n = [\mathbb{Q}_p(\alpha) : \mathbb{Q}_p]$. Cela montre alors que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p(\beta)$. Il est alors clair que $K := \mathbb{Q}(\beta)$ est dense dans \mathbb{K} , donc \mathbb{K} est le complété de K et donc $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ pour un idéal $\mathfrak{p}|p$. #

Un corollaire un peu plus fort :

Théorème (14.7)

Soit \mathbb{L}/\mathbb{K} une extension galoisienne de corps locaux (donc forcément finie). Alors il existe une extension L/K galoisienne de corps de nombres telle que $K \subset \mathbb{K}$, $L \subset \mathbb{L}$ et des places $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)$ et $\mathfrak{P} \in \mathbb{P}(L)$ telles que $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. On peut même supposer que $\text{Gal}(L/K) = \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$.

Preuve

Soit $G = \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. On choisit L un corps de nombres et \mathfrak{P} une place de L telle $\mathbb{L} = \mathbb{L}_{\mathfrak{P}}$ (c'est possible en vertu du Théorème(14.2)). Alors $\mathbb{L} = \mathbb{K} \cdot L$, car $\mathbb{K} \cdot L$ est bien un sous-corps local de \mathbb{L} dans lequel L est dense. Remplaçant L par $\prod_{\sigma \in G} \sigma(L)$, on peut supposer que L est stable par les éléments de G . Alors $\sigma \mapsto \sigma|_L$ est un homomorphisme injectif de G dans le groupe des automorphismes de L . Soit K le sous-corps de L fixe par les $\sigma|_L$. Alors L/K est une extension galoisienne de groupe de galois $\simeq G$, et $K \subset \mathbb{K}$. Alors posons $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}|_K$ et $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ l'adhérence de K dans \mathbb{K} , on a évidemment $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \subset \mathbb{K}$. Mais, $\mathbb{L}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$

est une extension galoisienne de groupe de Galois $\simeq Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$. Donc, $[\mathbb{L} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}] = |Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})| \leq |G| = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$, ce qui prouve que $\mathbb{K} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. #

Lemme (14.8)

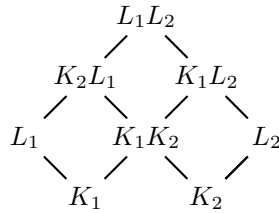
Soit \mathbb{L}/\mathbb{K} une extension abélienne de corps locaux, et pour $i = 1, 2$ L_i/K_i deux extensions abéliennes de corps de nombres avec des places \mathfrak{P}_i de L_i et \mathfrak{p}_i de K_i telles que $\mathfrak{P}_i|\mathfrak{p}_i$ et $\mathbb{L}_{1\mathfrak{p}_1} = \mathbb{L}_{2\mathfrak{p}_2} = \mathbb{L}$ et $\mathbb{K}_{1\mathfrak{p}_1} = \mathbb{K}_{2\mathfrak{p}_2} = \mathbb{K}$. Alors on a

$$\theta_{\mathfrak{p}_1}(L_1/K_1) = \theta_{\mathfrak{p}_2}(L_2/K_2),$$

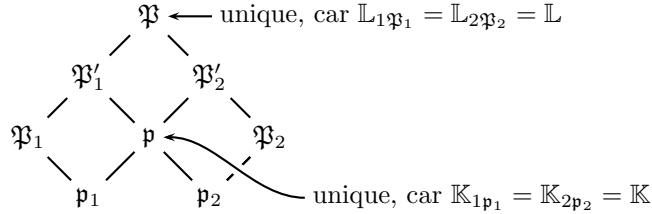
moyennant bien sûr les identifications de $Z(\mathfrak{P}_i/\mathfrak{p}_i)$ avec $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$.

Preuve

On a le diagramme :



Les places correspondantes sont



En appliquant le deuxième lemme de naturalité (Proposition (11.11)) avec $K = K_2$, $L = L_2$ et $E = K_1 K_2$, on trouve $\theta_{\mathfrak{p}_2}(L_2/K_2) \circ N_{\mathbb{K}/\mathbb{K}} = R \circ \theta_{\mathfrak{p}}(K_1 L_2/K_1 K_2)$, où $R : \text{Gal}(K_1 L_2/K_1 K_2) \rightarrow \text{Gal}(L_2/K_2)$ est la restriction à L_2 . Or, l'image de $\theta_{\mathfrak{p}}(K_1 L_2/K_1 K_2)$ est $Z(\mathfrak{P}'_2/\mathfrak{p}) \simeq \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ et l'image de $\theta_{\mathfrak{p}_2}(L_2/K_2)$ est $Z(\mathfrak{P}_2/\mathfrak{p}_2) \simeq \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ (cf. Théorème (11.3)). Dans ces conditions, on peut supposer (avec un petit abus) que $R = \text{id}$ et donc que $\theta_{\mathfrak{p}_2}(L_2/K_2) = \theta_{\mathfrak{p}}(K_1 L_2/K_1 K_2)$. Par un même raisonnement, on a $\theta_{\mathfrak{p}_1}(L_1/K_1) = \theta_{\mathfrak{p}}(K_2 L_1/K_1 K_2)$. En appliquant les premier lemme de naturalité (Proposition (11.10)) avec $K = K_1 K_2$, $L = K_1 L_2$ et $E = L_1 L_2$, on a $\theta_{\mathfrak{p}}(K_1 L_2/K_1 K_2) = R \circ \theta_{\mathfrak{p}}(L_1 L_2/K_1 K_2)$, où (comme avant) $R : Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p}) \rightarrow Z(\mathfrak{P}'_2/\mathfrak{p})$ qui peut aussi être vu comme l'identité car à nouveau chacun de ces groupes est isomorphe à $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. Puis, on montre de manière identique que $\theta_{\mathfrak{p}}(K_2 L_1/K_1 K_2) = \theta_{\mathfrak{p}}(L_1 L_2/K_1 K_2)$. Enfin,

$$\theta_{\mathfrak{p}_1}(L_1/K_1) = \theta_{\mathfrak{p}}(K_2 L_1/K_1 K_2) = \theta_{\mathfrak{p}}(L_1 L_2/K_1 K_2) = \theta_{\mathfrak{p}}(K_1 L_2/K_1 K_2) = \theta_{\mathfrak{p}_2}(L_2/K_2).$$

#

Proposition-Définition (14.9)

Soit \mathbb{L}/\mathbb{K} une extension abélienne de corps locaux. Alors il existe un homomorphisme

$$\theta(\mathbb{L}/\mathbb{K}) : \mathbb{K}^* \longrightarrow \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$$

surjectif de noyau $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)$ ayant les propriétés suivantes :

- a) Si L/K est une extension abélienne de corps de nombres et $\mathfrak{P}|\mathfrak{p}$ des places de L respectivement de K tels que $\mathbb{L}_{\mathfrak{P}} = \mathbb{L}$ et $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{K}$. Alors

$$\theta(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = \theta_{\mathfrak{p}}(L/K).$$

- b) Si en plus \mathbb{L}/\mathbb{K} est une extension non ramifiée et si π est une uniformisante de \mathbb{K} , alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $u \in U_{\mathfrak{p}}$ (les unités de \mathbb{K}) :

$$\theta(\mathbb{L}/\mathbb{K})(\pi^k \cdot u) = \text{Frob}(\mathbb{L}/\mathbb{K})^{-k}.$$

- c) Si \mathbb{E}/\mathbb{K} et \mathbb{L}/\mathbb{K} sont des extensions de corps locaux tels que \mathbb{L}/\mathbb{K} est abélienne, alors

$$\theta(\mathbb{L}/\mathbb{K}) \circ N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}} = R \circ \theta(\mathbb{E}\mathbb{L}/\mathbb{E}),$$

où $R : \text{Gal}(\mathbb{E}\mathbb{L}/\mathbb{E}) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ est la restriction à \mathbb{L} .

- d) Soit \mathbb{E}/\mathbb{L} et \mathbb{L}/\mathbb{K} des extensions de corps locaux telles que \mathbb{E}/\mathbb{K} est abélienne. Alors

$$\theta(\mathbb{L}/\mathbb{K}) = R \circ \theta(\mathbb{E}/\mathbb{K}),$$

où $R : \text{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{K}) \rightarrow \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ est la restriction à \mathbb{L} .

Preuve

L'existence de cet homomorphisme découle des Théorèmes (11.3) et (11.14). La partie a) vient du Théorème (14.7) et du lemme précédent (14.8). La partie b) provient de la Proposition (11.8). La partie c) est le deuxième lemme de naturalité (11.11). Et la partie d) est le premier lemme de naturalité (11.10).

#

Maintenant, nous devons faire un petit détour par les extensions de Kummer de corps locaux (voir Définition (9.1) pour la définition d'extension de Kummer).

Proposition (14.10)

Soit \mathbb{K} un corps local et $n \in \mathbb{N}$ un nombre entier. Alors $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^n$ est fini.

Supposons que \mathbb{K} contienne une racine primitive n -ième de l'unité. Posons $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\sqrt[n]{\mathbb{K}^*})$. Alors c'est une extension de Kummer de degré fini (c'est l'extension de Kummer maximale de \mathbb{K}) et on a $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*) = (\mathbb{K}^*)^n$.

Preuve

Soit π une uniformisante de \mathbb{K} . On sait que $\mathbb{K}^* \simeq \langle \pi \rangle \times U_{\mathfrak{p}} \simeq \mathbb{Z} \times U_{\mathfrak{p}}$ où \mathfrak{p} est l'idéal maximal de \mathbb{K} et $U_{\mathfrak{p}}$ est le sous-groupe des unités de \mathbb{K} . Et $(\mathbb{K}^*)^n \simeq n\mathbb{Z} \times U_{\mathfrak{p}}^n$. Montrons que $U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^n$ est fini. La

Proposition (5.11) nous assure l'existence d'un entier m tel que $U_{\mathfrak{p}}^{(m)} \subset U_{\mathfrak{p}}^n \subset U_{\mathfrak{p}}$. Or, $U_{\mathfrak{p}}/U_{\mathfrak{p}}^{(m)}$ est fini, nous l'avons montré au début de la preuve du Lemme (5.8). En vertu du Théorème (9.2) et de ce qui précède, \mathbb{L}/\mathbb{K} est l'extension de Kummer maximale de \mathbb{K} . Le même Théorème (9.2) nous montre que $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^n \simeq \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. La proposition-définition précédente (14.9) montre aussi que $\mathbb{K}^*/N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*) \simeq \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. Cela montre que $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*) = (\mathbb{K}^*)^n$, en effet, on a d'autre part $(\mathbb{K}^*)^n \subset N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)$, car puisque n est un exposant de $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ (cf. Théorème (9.2)), on a $(\mathbb{K}^*)^n \subset \ker(\theta(\mathbb{L}/\mathbb{K})) = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)$ ~~///~~

Maintenant un petit lemme de théorie des groupes :

Proposition-Définition (14.11)

Soit G un groupe fini et H un sous-groupe. On note $D(G, H)$ le sous-groupe engendré par les commutateurs $ghg^{-1}h^{-1}$, ($g \in G, h \in H$). Alors $D(G, H)$ est un sous-groupe normal de G . De plus, l'image de H via l'homomorphisme canonique $G \rightarrow \overline{G} = G/D(G, H)$ est dans le centre de \overline{G} . Enfin, si H est normal dans G et que G/H est cyclique, alors $G/D(G, H)$ est abélien.

Preuve

Tout d'abord, on montre que $x D(G, H) x^{-1} = D(G, H)$ pour tout $x \in G$. Soit $ghg^{-1}h^{-1} \in D(G, H)$. On a

$$xghg^{-1}h^{-1}x^{-1} = \underbrace{[(xg)h(xg)^{-1}h^{-1}]}_{\in D(G, H)} \cdot \underbrace{(xhx^{-1}h^{-1})^{-1}}_{\in D(G, H)}.$$

Le fait que l'image de H dans \overline{G} est dans le centre est évident. Montrons la dernière partie : on note \overline{g} l'image de $g \in G$ dans \overline{G} . On choisit $b \in G$ tel que sa classe modulo H engendre G/H . Alors tout élément de G s'écrit $h \cdot b^m$ ($h \in H, m \in \mathbb{Z}$). Donc tout élément de \overline{G} s'écrit $\overline{h} \cdot \overline{b}^m$. Soit $\overline{h'} \cdot \overline{b}^k$ un autre élément de \overline{G} . Alors

$$(\overline{h} \cdot \overline{b}^m) \cdot (\overline{h'} \cdot \overline{b}^k) = (\overline{h'} \cdot \overline{b}^k) \cdot (\overline{h} \cdot \overline{b}^m)$$

car \overline{h} et $\overline{h'}$ sont dans le centre de \overline{G} et que $\overline{b}^m \cdot \overline{b}^k = \overline{b}^{m+k} = \overline{b}^k \cdot \overline{b}^m$. ~~///~~

Théorème (14.12)

Soit \mathbb{L}/\mathbb{K} une extension galoisienne de degré fini de corps locaux. Supposons que $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ soit résoluble. Notons \mathbb{L}^{ab} la sous-extension abélienne maximale de \mathbb{L}/\mathbb{K} . Alors

$$N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*) = N_{\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^{\text{ab}*}).$$

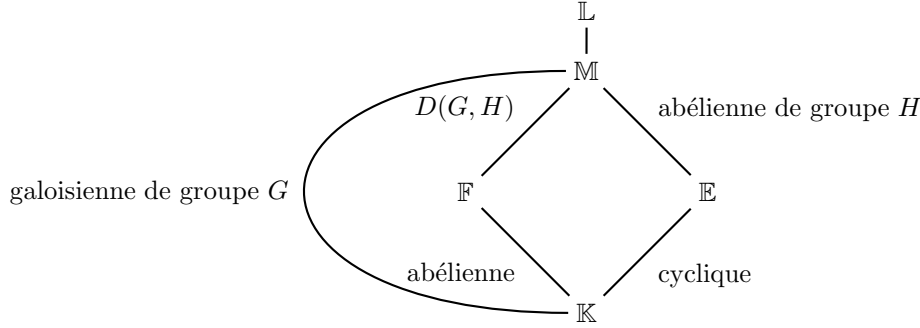
(En fait le résultat est vrai même dans le cas non résoluble, mais nous n'avons pas besoin de le montrer, ce serait plus long et la situation dans laquelle nous utiliserons ce résultat sera clairement résoluble).

Preuve

On a clairement $N_{\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^{\text{ab}*}) \supset N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)$.

Pour montrer l'inclusion inverse, on procède par récurrence sur $n = [\mathbb{L} : \mathbb{K}]$. Si $n = 1$, c'est évident. Supposons donc $n > 1$ et le théorème vrai pour tout $m < n$. Puisque $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ est résoluble, on voit facilement qu'il admet un quotient cyclique non trivial (si vous n'êtes pas convaincu, voyez [La1, Prop. 1.3.1, p.20]). Autrement dit, il existe une sous-extension \mathbb{E}/\mathbb{K} de \mathbb{L}/\mathbb{K} cyclique de degré > 1 . Soit

\mathbb{M}/\mathbb{E} la sous-extension abélienne maximale de \mathbb{L}/\mathbb{E} . Il est évident que $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{M})$ est le sous-groupe des commutateurs de $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{E})$ (on avait déjà fait ce raisonnement au Théorème (10.3)) et $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{E})$ est normal dans $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$. Cela implique que $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{M})$ est normal dans $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ (vérification facile, sinon, voir [Jac1, rel. 26, p. 246]). Donc l'extension \mathbb{M}/\mathbb{K} est galoisienne. Notons $G = \text{Gal}(\mathbb{M}/\mathbb{K})$ et $H = \text{Gal}(\mathbb{M}/\mathbb{E})$. Ainsi, H est un sous-groupe normal, abélien de G et $G/H = \text{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{K})$ est cyclique. Soit \mathbb{F} le corps fixe par $D(G, H)$. Par le lemme précédent (14.11), l'extension \mathbb{F}/\mathbb{K} est abélienne. On est donc dans la situation suivante :



De la partie c) de la Proposition-Définition (14.9) appliquée à $\mathbb{L} = \mathbb{F}$, $\mathbb{E} = \mathbb{E}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{K}$, on trouve $R_{\mathbb{F}\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}} \circ \theta(\mathbb{F}\mathbb{E}/\mathbb{E}) = \theta(\mathbb{F}/\mathbb{K}) \circ N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}$. La partie d) de cette même proposition (14.9) appliqué à $\mathbb{E} = \mathbb{M}$, $\mathbb{L} = \mathbb{F}\mathbb{E}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{E}$, montre que $\theta(\mathbb{F}\mathbb{E}/\mathbb{E}) = R_{\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{F}\mathbb{E}} \circ \theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})$. En combinant tout cela, on trouve

$$R_{\mathbb{M} \rightarrow \mathbb{F}} \circ \theta(\mathbb{M}/\mathbb{E}) = \theta(\mathbb{F}/\mathbb{K}) \circ N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}. \quad (*)$$

Rappelons que nous voulons montrer que $N_{\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^{\text{ab}*}) \subset N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)$. Soit donc $x \in N_{\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^{\text{ab}*})$. Puisque $\mathbb{L}^{\text{ab}} \supset \mathbb{F}, \mathbb{E}$, alors $x \in N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\mathbb{F}^*) \cap N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(\mathbb{E}^*)$. Choisissons $y \in \mathbb{E}^*$ tel que $N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(y) = x$. Appliquant l'égalité (*) à y , on trouve

$$\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})(y)|_{\mathbb{F}} = \theta(\mathbb{F}/\mathbb{K})(x) = \text{id}_{\mathbb{F}},$$

car $x \in N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(\mathbb{F}^*) = \ker(\theta(\mathbb{F}/\mathbb{K}))$. Cela montre que $\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})(y) \in D(G, H)$, ce qui veut dire que $\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})(y)$ est un produit d'éléments de la forme $\rho\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})(z)\rho^{-1}\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})^{-1}(z)$, avec $\rho \in G$ et $z \in \mathbb{E}^*$, ceci par définition de $D(G, H)$ et parce que $\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})$ est une surjection sur H . Par le troisième lemme de naturalité (Proposition (11.13)) on a $\rho\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})(z)\rho^{-1} = \theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})(\rho(z))$ (car $\rho(\mathbb{M}) = \mathbb{M}$ et $\rho(\mathbb{E}) = \mathbb{E}$, puisque \mathbb{E}/\mathbb{K} est galoisien). Donc $\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})(y)$ est un produit d'éléments de la forme $\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})(\frac{\rho(z)}{z})$, disons,

$$\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})(y) = \theta(\mathbb{M}/\mathbb{E}) \left(\prod_{i=1}^r \frac{\rho_i(z_i)}{z_i} \right),$$

avec $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{E}^*$ et $\rho_1, \dots, \rho_r \in G$. Ainsi,

$$y' := y \cdot \left(\prod_{i=1}^r \frac{\rho_i(z_i)}{z_i} \right)^{-1} \in \ker(\theta(\mathbb{M}/\mathbb{E})) = N_{\mathbb{M}/\mathbb{E}}(\mathbb{M}^*) \stackrel{\text{hyp}}{\stackrel{\text{de rec.}}{=}} N_{\mathbb{L}/\mathbb{E}}(\mathbb{L}^*).$$

Il existe donc $l \in \mathbb{L}^*$ tel que $N_{\mathbb{L}/\mathbb{E}}(l) = y'$. D'autre part, puisque $\rho_i|_{\mathbb{E}} \in \text{Gal}(\mathbb{E}/\mathbb{K})$, on a $N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(\frac{\rho_i(z_i)}{z_i}) = 1$

pour tout i . Donc, $N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(y') = N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(y) \cdot \underbrace{N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}} \left(\prod_{i=1}^r \frac{\rho_i(z_i)}{z_i} \right)^{-1}}_{=1} = x$. Finalement,

$$x = N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(y) = N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(y') = N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(N_{\mathbb{L}/\mathbb{E}}(l)) = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(l),$$

ce qui achève la (jolie) preuve du théorème. ##

Théorème (14.13) (Corps de classe local)

Soit \mathbb{K} un corps local. La correspondance

$$\mathbb{L} \longrightarrow N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)$$

est une bijection (qui renverse l'inclusion) de l'ensemble des extensions abéliennes de degré fini \mathbb{L} de \mathbb{K} (contenue dans une même clôture algébrique de \mathbb{K}), et les sous-groupes ouverts d'indices finis de \mathbb{K}^* .

Preuve

Remarquons au passage que dans les cas archimédiens, il n'y a pas besoin de toute cette théorie : \mathbb{C}^* est le seul sous-groupe ouvert de \mathbb{C}^* et \mathbb{R}^* et \mathbb{R}_+^* sont les seuls sous-groupes ouverts de \mathbb{R}^* .

D'autre part, il serait judicieux de s'assurer que si \mathbb{L}/\mathbb{K} est une extension abélienne, alors $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)$ est un ouverts de \mathbb{K}^* . En effet, si \mathbb{K} est archimédien, c'est évident. Sinon, on sait que, via une uniformisante, $\mathbb{K}^* \simeq \mathbb{Z} \times U_{\mathfrak{p}}$ (topologie produit, \mathbb{Z} est muni de la topologie discrète et $U_{\mathfrak{p}}$ de la topologie héritée de \mathbb{K}) qui est un homéomorphisme de groupes topologiques. Or, en vertu de la Proposition (5.11), il existe un entier b tel que

$$N_{\mathbb{L}\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*) \supset (\mathbb{K}^*)^n \simeq n\mathbb{Z} \times U_{\mathfrak{p}}^n \supset n\mathbb{Z} \times U_{\mathfrak{p}}^{(b)},$$

et l'ensemble de droite est clairement un sous-groupe ouvert, donc $(\mathbb{K}^*)^n \simeq \bigcup_{x \in U_{\mathfrak{p}}^n} (n\mathbb{Z} \times xU_{\mathfrak{p}}^{(b)})$ et $N_{\mathbb{L}\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*) = \bigcup_{x \in N_{\mathbb{L}\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)} x(\mathbb{K}^*)^n$ sont aussi ouverts.

Ensuite, montrons que la correspondance $\mathbb{L} \rightarrow N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)$ est injective et inverse l'inclusion : supposons que $N_{\mathbb{L}_2/\mathbb{K}}(\mathbb{L}_2^*) \subset N_{\mathbb{L}_1/\mathbb{K}}(\mathbb{L}_1^*)$. La partie c) de la Proposition-Définition (14.9) nous montre que $\underbrace{\theta(\mathbb{L}_1/\mathbb{K}) \circ N_{\mathbb{L}_2/\mathbb{K}}}_{=1} = R \circ \theta(\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2/\mathbb{L}_2)$. Cela montre (puisque R est injective) que l'application $\theta(\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2/\mathbb{L}_2)$ qui est surjective sur $\text{Gal}(\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2/\mathbb{L}_2)$ est l'application triviale, cela montre que $\text{Gal}(\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2/\mathbb{L}_2)$ est le groupe trivial, donc que $\mathbb{L}_1\mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2$ et alors $\mathbb{L}_1 \subset \mathbb{L}_2$.

Enfin, montrons la surjection de la correspondance : soit N un sous-groupe ouvert d'indice fini de \mathbb{K}^* . Soit $n \geq 1$ tel que $(\mathbb{K}^*)^n \subset N$ (par exemple $n = [\mathbb{K}^* : N]$). Soit μ_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unités dans la clôture algébrique considérée de \mathbb{K} . Et soit enfin, \mathbb{L} la n -extension de Kummer maximale de $K(\mu_n)$. L'extension \mathbb{L}/\mathbb{K} est galoisienne. En effet, soit $\sigma : \mathbb{L} \rightarrow \overline{\mathbb{L}}$, un \mathbb{K} -plongement de \mathbb{L} dans une clôture algébrique. Soit $\alpha \in \mathbb{L}$. En vertu de la Proposition (14.10), il existe $a \in \mathbb{K}(\mu_n)$ tel que $\alpha^n - a = 0$. Donc, $\sigma(\alpha)^n - \sigma(a) = 0$. Puisque $\mathbb{K}(\mu_n)/\mathbb{K}$ est galoisienne, $\sigma(a) \in \mathbb{K}(\mu_n)$. Et puisque \mathbb{L} contient toutes les racines n -ièmes d'élément de $\mathbb{K}(\mu_n)$ (toujours grâce à la Proposition (14.10)), on en déduit que $\sigma(\alpha) \in \mathbb{L}$, ce qui prouve que \mathbb{L}/\mathbb{K} est galoisienne. Et puisque $\mathbb{K}(\mu_n)/\mathbb{K}$ est cyclique, $\text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K})$ est résoluble; on est donc dans les hypothèses du théorème précédent (14.12). Ainsi, posons $N_0 := N_{\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^{\text{ab}*}) = N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*)$. D'autre part, par la Proposition (14.10), $N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}(\mu_n)}(\mathbb{L}^*) = (\mathbb{K}(\mu_n)^*)^n$. Donc,

$$\begin{aligned} N_0 &= N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}}(\mathbb{L}^*) = N_{\mathbb{K}(\mu_n)/\mathbb{K}}(N_{\mathbb{L}/\mathbb{K}(\mu_n)}(\mathbb{L}^*)) = N_{\mathbb{K}(\mu_n)/\mathbb{K}}((\mathbb{K}(\mu_n)^*)^n) \\ &= N_{\mathbb{K}(\mu_n)/\mathbb{K}}((\mathbb{K}(\mu_n)^*)^n) \subset (\mathbb{K}^*)^n \subset N. \end{aligned}$$

D'après ce qu'on a prouvé pour l'injection, l'application $\mathbb{E} \rightarrow N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(\mathbb{E}^*)$ est une injection des sous-extensions \mathbb{E}/\mathbb{K} de $\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K}$ dans l'ensemble des sous-groupes de \mathbb{K}^* qui contiennent N_0 . Or, $\theta(\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K})$

induit un isomorphisme $\mathbb{K}^*/N_0 \simeq \text{Gal}(\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K})$. Donc, l'ensemble de ces sous-groupes est en bijection avec les sous-groupes de $\text{Gal}(\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{L})$, donc, par la théorie de Galois avec l'ensemble des sous-extensions de $\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K}$. En particulier, il existe une sous-extension \mathbb{E}/\mathbb{K} de $\mathbb{L}^{\text{ab}}/\mathbb{K}$ telle que $N_{\mathbb{E}/\mathbb{K}}(\mathbb{K}^*) = N$. Cela démontre le théorème. #

Voilà !!!

Appendice I

Deux mots sur les corps quadratiques et sur des représentations de nombres premiers

Définitions (I.i)

Soit K un corps de nombres. Un *ordre* sur K est un sous-anneau \mathcal{O} de K qui est un \mathbb{Z} -module de génération finie contenant une \mathbb{Q} -base de K . Un raisonnement classique sur l'intégralité ($\alpha \cdot \mathcal{O} \subset \mathcal{O} \Rightarrow \alpha$ est entier) montre que tout ordre est inclu dans O_K . C'est pourquoi O_K est souvent appelé l'ordre maximal de K . Evidemment, si \mathcal{O} est inclu strictement dans O_K , il n'est pas intégralement clos, donc l'ensemble de ses idéaux fractionnaires ne forme pas un groupe comme c'est le cas pour O_K . En revanche, \mathcal{O} est tout de même à quotients finis, il est donc noethérien, et tout idéal premier non nul est maximal. Clairement, si $\alpha \in O_K$, alors $\mathbb{Z}[\alpha]$ est un ordre.

Concentrons-nous sur les corps quadratiques. Rappelons les résultats classiques sur ces corps : soit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ sans facteurs carrés et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Notons d_K le discriminant de K/\mathbb{Q} . Alors on a :

$$d_K = \begin{cases} 4m & \text{si } m \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ m & \text{si } m \equiv 1 \pmod{4} \end{cases} \quad \text{et} \quad O_K = \mathbb{Z} \left[\frac{d_K + \sqrt{d_K}}{2} \right] = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{m}] & \text{si } m \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \mathbb{Z} \left[\frac{1+\sqrt{m}}{2} \right] & \text{si } m \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Posons $w_K = \frac{d_K + \sqrt{d_K}}{2}$. Si $\alpha, \beta \in K$ sont linéairement indépendants, le \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta$ se note $[\alpha, \beta]$. Il est donc clair que $O_K = \mathbb{Z}[w_K] = [1, w_K]$.

Définition-Lemme (I.ii)

Pour tout entier $f \geq 1$, il existe un unique ordre \mathcal{O}_f de $\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ tel que $[O_K : \mathcal{O}_f] = f$ et de fait, $\mathcal{O}_f = \mathbb{Z}[fw_K] = [1, fw_K]$. On dit que f est le *conducteur* de l'ordre \mathcal{O}_f . Et tous les ordres sont donc de ce type

Preuve

Puisque $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}w_K)/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}fw_K) \simeq \mathbb{Z}/f\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[fw_K]$ est un ordre d'indice f dans O_K .

Inversement, soit \mathcal{O} un ordre d'indice f dans O_K . Alors $\mathbb{Z} \subset \mathcal{O}$ (car \mathcal{O} est un sous-anneau de K) et $f \cdot O_K \subset \mathcal{O}$. Ainsi, $\mathbb{Z} + f \cdot O_K = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}fw_K \subset \mathcal{O}$. Donc il y a égalité, puisqu'ils ont le même indice. $\#$

Définition-Théorème (I.iii)

Soit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ sans facteurs carrés et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Soit un entier $f > 0$ et $\mathcal{O} = [1, fw_K]$ l'unique ordre d'indice f de K . On pose $D := f^2 \cdot d_K$ le discriminant de \mathcal{O} . Il est évident que $D \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$ et que $\mathcal{O} = [1, \sqrt{D}]$ si $D \equiv 0 \pmod{4}$ et $\mathcal{O} = [1, \frac{1+\sqrt{D}}{2}]$ si $D \equiv 1 \pmod{4}$. Réciproquement, si $D \equiv 0, 1 \pmod{4}$, $D \neq 0, 1$ n'est pas un carré, (on dit alors que D est un *discriminant*), alors il existe un unique entier $f > 0$ et un unique corps quadratique K , tel que $D = f^2 \cdot d_K$ (et donc, en vertu du lemme précédent, un unique ordre \mathcal{O} tel que $[O_K : \mathcal{O}] = f$).

Preuve

C'est à peu près évident : soit D un discriminant. Il existe un unique entier positif g tel que $D = g^2 \cdot m$, avec m sans facteur carré. Si $m \equiv 1 \pmod{4}$, alors $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ et si $m \equiv 2, 3 \pmod{4}$, alors forcément g est pair (par hypothèse sur D), et dans ce cas, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ et $f = \frac{g}{2}$. L'unicité vient du fait que $\mathbb{Q}(\sqrt{h^2 \cdot m}) = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$, pour tout h entier non nul. $\#$

Définitions (I.iv)

Soit $m \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ sans facteurs carrés et $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$. Soit un entier $f > 0$ et $\mathcal{O} = [1, fw_K]$ l'unique ordre d'indice f de K . On pose $H_{\mathcal{O}} = \{\frac{\alpha}{\beta} \cdot O_K \mid \alpha, \beta \in \mathcal{O}, \text{ premiers à } f\}$, le sous-groupe de $I_K(f \cdot O_K)$ engendré par les idéaux principaux de la forme $\alpha \cdot O_K$, avec $\alpha \in \mathcal{O}$, premier à f . Alors, il est évident que $P_{f \cdot O_K} \subset H_{\mathcal{O}} \subset I_K(f \cdot O_K)$. Si K est réel, on pose $H_{\mathcal{O}}^+$ le même sous-groupe avec la contrainte supplémentaire que α soit totalement positif (i.e $\sigma(\alpha) > 0$ pour tout plongement de K dans \mathbb{R}). Alors on a $P_{\mathfrak{m}} \subset H_{\mathcal{O}}^+ \subset I_K(\mathfrak{m})$, où $\mathfrak{m} = fO_K \cdot \{\sigma_1, \sigma_2\}$, avec σ_1, σ_2 les deux places infinies de K (l'identité et la conjugaison).

On appelle le *corps de classe de \mathcal{O}* le corps de la classe de $H_{\mathcal{O}}$. Et on appelle le *corps de classe étendu de \mathcal{O}* le corps de la classe de $H_{\mathcal{O}}^+$. On peut construire ces corps de classe en vertu du théorème d'existence du corps de classe (Théorème (8.10)).

Si D est un discriminant, on désigne par Q_D la forme quadratique :

$$Q_D(x, y) = \begin{cases} x^2 - \frac{D}{4}y^2 & \text{si } D \equiv 0 \pmod{4} \\ x^2 + xy + \frac{1-D}{4}y^2 & \text{si } D \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Clairement, c'est une forme quadratique entière (i.e. une application du type $(x, y) \mapsto ax^2 + bxy + cy^2$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$), primitive ($\text{pgcd}(a, b, c) = 1$), de discriminant $b^2 - 4ac = D$, définie positive si $D < 0$.

Théorème (I.v)

Soit D un discriminant, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, et \mathcal{O} , l'ordre de K de discriminant $D (= f^2 \cdot d_K)$. Soit L le corps de classe de \mathcal{O} (étendu dans la cas réel ($D > 0$)). Soit p un nombre premier (en particulier positif), $p \nmid D$. Alors on a l'équivalence :

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p = Q_D(x, y) \iff p \text{ est complètement décomposé dans } L.$$

Preuve

On remarque déjà immédiatement que $Q_D(x, y) = N_{K/\mathbb{Q}}(x + y \cdot w_D)$, où $w_D = \begin{cases} \sqrt{D} & \text{si } D \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1+\sqrt{D}}{2} & \text{si } D \equiv 1 \pmod{4}, \end{cases}$ en vertu de la définition de la norme et de la Définition-Théorème (I.iii). Donc, $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $p = Q_D(x, y) \iff \exists \alpha \in \mathcal{O}$ tel que $p = N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)$. Ceci est équivalent à $p = \alpha \cdot \alpha'$ où α' est le conjugué d' α ; donc ils ont le même signe si K est réel. Donc, quitte à remplacer α par $-\alpha$, on peut supposer que α est totalement positif si K est réel. Ainsi, $\exists \alpha \in \mathcal{O}$ tel que $p = N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \iff p \cdot O_K = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}'$, avec $\mathfrak{p} = \alpha O_K \in \mathbb{P}_0(K)$ (car p est un nombre premier), et $\mathfrak{p}' \in \mathbb{P}_0(K)$ est le conjugué de \mathfrak{p} . Or \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' sont premiers à f , puisque p l'est. Donc \mathfrak{p} et \mathfrak{p}' sont dans $H_{\mathcal{O}}$ (resp. dans $H_{\mathcal{O}}^+$ si K est réel). Mais par définition, $H_{\mathcal{O}}$ (resp. $H_{\mathcal{O}}^+$ si K est réel) est le noyau de l'application d'Artin pour l'extension L/K , donc ils sont totalement décomposés dans L . Finalement,

$$\begin{aligned} \exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p = Q_D(x, y) &\iff p \cdot O_K = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}' \text{ avec } \mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in H_{\mathcal{O}} \text{ (resp. } H_{\mathcal{O}}^+ \text{ si } K \text{ est réel)} \\ &\iff p \cdot O_K = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{p}' \text{ avec } \mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \text{ totalement décomposés dans } L \\ &\iff p \text{ est complètement décomposé dans } L. \end{aligned}$$

#

Corollaire (I.vi)

Si D est un discriminant, alors l'ensemble des nombre premiers p représenté par la forme Q_D a une densité de Dirichlet strictement positive (en particulier, il y en a une infinité).

Preuve

C'est évident, en vertu du théorème précédent et du fait que l'ensemble des premiers qui décompose complètement à une densité strictement positive (cf. Lemme (2.14)).

#

Corollaire (I.vii)

Si D est un discriminant, alors il existe $f_D \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire et irréductible tel que pour tout p nombre premier tel que $p \nmid D$ et $p \nmid \text{disc}(f_D)$, on ait l'équivalence :

$$\begin{aligned} \exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p = Q_D(x, y) &\iff f_D \text{ est totalement scindé mod } p \\ &\iff f_D(x) \equiv 0 \pmod{p} \text{ a une solution.} \end{aligned}$$

Preuve

Considérons $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ et L le corps de classe construit au théorème précédent. Supposons que $L = \mathbb{Q}(\alpha)$, avec $\alpha \in O_L$ (c'est possible en vertu de [Sam, Corollaire, p. 41], pour un $\alpha \in K$, mais on peut le supposer dans O_K grâce au raisonnement du début de la preuve du Lemme (13.10)). On prend f_D le polynôme minimal de α sur \mathbb{Q} . Remarquons tout d'abord que l'extension L/\mathbb{Q} est galoisienne. En effet, soit $\sigma : L \rightarrow \mathbb{C}$ un plongement. On regarde comme toujours $L \subset \mathbb{C}$. Il s'agit de prouver que $\sigma(L) = L$. Si $\sigma|_K = \text{id}$ alors $\sigma(L) = L$, puisque L/K est galoisienne. Si $\sigma|_K \neq \text{id}$, alors $\sigma(x) = x'$ où x' est le conjugué de x dans K , pour tout $x \in K$ (car $\sigma(K) = K$, puisque K/\mathbb{Q} est galoisienne). Le corps $\sigma(L)$ est une extension de $\sigma(K) = K$. Donc $\sigma(L)/K$ est une extension abélienne, celle qui correspond à $\sigma(H_{O_D}) = \{\sigma(\alpha O_K) \mid \alpha O_K \in H_{O_D}\}$. Mais $\sigma(\alpha O_K) = \alpha' O_K$. La définition de H_{O_D} montre que $\sigma(H_{O_D}) = H_{O_D}$, car α est premier à f si et seulement si α' l'est et α' est totalement positif si et seulement si α' l'est. Et finalement $\sigma(L) = L$ et donc L/\mathbb{Q} est galoisienne.

Terminons la preuve : le théorème précédent nous apprend que $p = Q_D(x, y) \iff p$ est totalement décomposé dans L c'est à dire $f(\mathfrak{p}/p) = 1$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(L)$ tel que $\mathfrak{p}|p$. Cela est équivalent à dire que $O_L/\mathfrak{p} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ et ainsi toutes les racines de f_D (qui sont dans O_L , car L/\mathbb{Q} galoisienne) modulo \mathfrak{p} sont dans \mathbb{F}_p c'est-à-dire que f_D est totalement scindé modulo p .

Reste à voir que si $f_D(x) \equiv 0 \pmod{p}$ a une solution mod p , alors il est totalement scindé mod p . Deux moyens de voir ceci :

- 1) Si $p \nmid [O_L : \mathbb{Z}[\alpha]]$ (ce qui est le cas ici, car $p \nmid |\text{disc}(f_D)| = [O_L : \mathbb{Z}[\alpha]] \cdot \text{disc}(O_L)$), on sait que les $f(\mathfrak{p}/p)$ sont les degrés des facteurs irréductibles de la décomposition de f_D dans \mathbb{F}_p (cf. [Mar, Thm. 27, p. 79]). Donc dire que $f_D(x) \equiv 0 \pmod{p}$ a une solution mod p , veut dire qu'il existe $\mathfrak{p}|p$ tel que $f(\mathfrak{p}/p) = 1$, et alors $f(\mathfrak{p}/p) = 1$ pour tout premier $\mathfrak{p}|p$, car dans une extension galoisienne, tous les $f(\mathfrak{p}/p)$ sont égaux pour p fixé. En traduction, f_D est totalement décomposé mod p .
- 2) Un autre manière de voir serait de se souvenir que $L \otimes \mathbb{Q}_p = \mathbb{Q}_p[x]/(f_D) = \prod_{\mathfrak{p}|p} \mathbb{L}_{\mathfrak{p}}$ (cf. [Fr-Tay, 1.6.a, p. 109]) et que si $f_D = f_1 \cdots f_r$ est la décomposition de f_D dans \mathbb{Q}_p , on a $\mathbb{Q}_p[x]/(f_i) \simeq \mathbb{L}_{\mathfrak{p}_i}$

pour un certain $\mathfrak{p}_i|p$. Or, $[\mathbb{L}_{\mathfrak{p}} : \mathbb{Q}_p] = f(\mathfrak{p}/p)$ (puisque p ne ramifie pas dans L (cf. [Fr-Tay, 1.14, p. 111])). Donc, dire que f a une racine mod p veut dire que f_i a une racine mod \widehat{p} ($\widehat{p} = p \cdot \mathbb{Z}_p$). Donc par le Lemme de Hensel (qui s'applique ici, puisque $p \nmid \text{disc}(f_D)$) (cf. [Fr-Tay, 3.25+1.9, pp. 84+10])) f_i a une racine dans \mathbb{Q}_p , ce qui veut dire que $\mathbb{L}_{\mathfrak{p}_i} = \mathbb{Q}_p$, et donc que $f(\mathfrak{p}_i/p) = 1$ et par suite, puisque L/\mathbb{Q} est galoisienne, $f(\mathfrak{p}/p) = 1$ pour tout $\mathfrak{p}|p$ ce qui veut dire que p est totalement décomposé sur \mathbb{F}_p et donc f_D est totalement décomposé dans \mathbb{F}_p , comme on vient de le voir. \neq

On a encore un petit raffinement si le discriminant est négatif :

Corollaire (I.viii)

Si D est un discriminant strictement négatif, alors il existe $g_D \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire et irréductible de degré moitié de celui du corollaire précédent tel que pour tout p nombre premier tel que $p \nmid D$ et $p \nmid \text{disc}(g_D)$, on ait l'équivalence :

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} \text{ tels que } p = Q_D(x, y) \iff \left(\frac{D}{p} \right) = 1 \text{ et } g_D(x) \equiv 0 \pmod{p} \text{ a une solution,}$$

où $\left(\frac{D}{p} \right)$ est bien sûr le symbole de Legendre.

Preuve

Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ et L comme pour les résultats précédents. Remarquons d'abord que l'extension L/\mathbb{Q} est totalement complexe, car non réelle, à cause de K , et on a vu au corollaire précédent que L/\mathbb{Q} était galoisienne. Donc, la conjugaison complexe est un \mathbb{Q} automorphisme de L . Soit E le sous-corps de L fixe par la conjugaison complexe. Alors $E \cap K = \mathbb{Q}$ et $[E : \mathbb{Q}] = \frac{1}{2} \cdot [L : \mathbb{Q}] = [L : K]$. Donc $L = E \cdot K$, et si $E = \mathbb{Q}(\alpha)$, on a $L = K(\alpha)$ et $\min(\alpha/K) = \min(\alpha/\mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}[X]$, unitaire et irréductible. Prenons donc $g_D = \min(\alpha/\mathbb{Q}) \in \mathbb{Z}[X]$ et $\alpha \in O_E \subset O_L$. On a vu au Théorème (I.v) que $\exists x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $p = Q_D(x, y)$ si et seulement si p se décompose totalement dans L . Or p se décompose totalement dans K si et seulement si $\left(\frac{D}{p} \right) = 1$ (car dans ce cas, $x^2 - D$ possède une solution modulo p et on raisonne comme pour le corollaire précédent). Et de même, si $pO_K = \mathfrak{p} \cdot \bar{\mathfrak{p}}$, \mathfrak{p} se décompose complètement dans L si et seulement si $g_D(x) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ a une solution. Mais, comme $g_D \in \mathbb{Z}[X]$ et $O_K/\mathfrak{p} \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, cela revient à dire que $g_D(x) \equiv 0 \pmod{p}$ a une solution. On fait le même raisonnement pour $\bar{\mathfrak{p}}$ et cela montre le corollaire. \neq

Remarque

La Théorie de la multiplication complexe permet d'exhiber un α comme dans le corollaire précédent (c'est-à-dire $\alpha \in O_L$ réel tel que $L = K(\alpha)$) comme suit : soit Λ un réseau dans \mathbb{C} (c'est-à-dire un sous- \mathbb{Z} -module de \mathbb{C} engendré par des éléments de \mathbb{R}). On définit $g_2(\Lambda) = 60 \cdot \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda^4}$, $g_3(\Lambda) = 140 \cdot \sum_{0 \neq \lambda \in \Lambda} \frac{1}{\lambda^6}$, $\Delta(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3 - 27g_3(\Lambda)^2$ qu'on prouve être le discriminant de Λ , donc $\neq 0$ et $j(\Lambda) = 1728 \cdot \frac{g_2(\Lambda)^3}{\Delta(\Lambda)}$. Si \mathcal{O} est un ordre dans le corps quadratique imaginaire K , on peut voir \mathcal{O} comme un réseau dans \mathbb{C} et on peut montrer que $j(\mathcal{O})$ est un entier algébrique tel que $L = K(j(\mathcal{O}))$.

Par exemple, si $D = -56$, et donc $\mathcal{O} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}[\sqrt{-14}] = O_{\mathbb{Q}(\sqrt{-14})}$, alors on peut calculer que

$$j(\mathcal{O}) = 2^3 \left(323 + 228\sqrt{2} + (231 + 161\sqrt{2})\sqrt{2\sqrt{2}-1} \right)^3,$$

“ce qui implique que” $L = K(\sqrt{2\sqrt{2}-1})$. On montre facilement que le polynôme minimal de $\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ est $x^4 + 2x^2 - 7 = (x^2 + 1)^2 - 8$. Ce qui montre que la densité des nombres premiers impairs $p \neq 7$ tels que $p = x^2 + 14y^2$ est strictement positive et

$$p = x^2 + 14y^2 \iff \left(\frac{-14}{p}\right) = 1 \text{ et } (x^2 + 1)^2 \equiv 8 \pmod{p} \text{ a une solution.}$$

Pour plus de détails, voir le livre [Cox].

Appendice II

Deux mots sur le symbole de Hilbert

Définition (II.i)

Soit $n \in \mathbb{N}$, K un corps de nombres contenant une racine primitive n -ième de l'unité. Soit \mathfrak{p} une place de K et $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ le complété localisé de K en \mathfrak{p} . On considère encore $\mathbb{L} = \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*})$ qui est la n -extension maximale de Kummer de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. On sait de plus que $\ker(\theta(\mathbb{L}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}})) = (\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*)^n$ (cf. Propositions (14.9) et (14.10)). Notons $G = \text{Gal}(\mathbb{L}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}})$. On a donc un isomorphisme $\bar{\theta}(\mathbb{L}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}) : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*)^n \simeq G$. Notons μ_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$. Notons comme toujours \hat{G} l'ensemble des homomorphismes de G sur μ_n . Puisque l'extension $\mathbb{L}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ est une n -extension de Kummer, nous savons (cf. (9.2), $M = K^*$) que l'application $\chi : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \rightarrow \hat{G}$, $b \mapsto (\sigma \mapsto \frac{\sigma(\sqrt[n]{b})}{\sqrt[n]{b}})$ est un homomorphisme de noyau $(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*)^n$. Ainsi on a un isomorphisme $\bar{\chi} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*)^n \simeq \hat{G}$. Puis par composition avec le couplage $G \times \hat{G} \rightarrow \mu_n$, $(\sigma, \chi) \mapsto \chi(\sigma)$, on peut (enfin) définir le couplage non dégénéré suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*)^n \times \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*/(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*)^n &\longrightarrow \mu_n \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\longmapsto \left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n := \bar{\chi}(\bar{b})(\bar{\theta}(\mathbb{L}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}})(\bar{a})) \end{aligned}$$

qu'on appelle *n -ième symbole de Hilbert*. Par restriction à $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})$ (Proposition-Définition (14.9), d)), le symbole $\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n$, peut être défini par la relation

$$\theta(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}})(a)(\sqrt[n]{b}) = \left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n \cdot (\sqrt[n]{b}). \quad (*)$$

Les esprits observateurs remarqueront que cette relation ressemble drôlement à la relation (*) de la preuve du Théorème (9.10). Ce n'est pas un hasard :

Proposition (II.ii)

Soit n , K , \mathfrak{p} comme pour la définition précédente. Posons π une uniformisante de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. Supposons de plus que $\mathfrak{p} \nmid n \cdot \alpha$. Alors

$$\left(\frac{\pi, \alpha}{\mathfrak{p}} \right)_n = \left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}} \right)_n^{-1},$$

où $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}} \right)_n$ est le symbole de puissance n -ième résiduelle défini lors de la Définition (9.8), et étendu de manière naturelle sur $O_{\mathfrak{p}} (= O_{K_{\mathfrak{p}}})$ puisque $O_{\mathfrak{p}}/\hat{\mathfrak{p}} \simeq O_K/\mathfrak{p}$ (cf. [Fr-Tay, Theorem 11, p. 77]).

Preuve

Puisque $\hat{\mathfrak{p}} \nmid n \cdot \alpha$, alors $\hat{\mathfrak{p}}$ ne ramifie pas dans $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})$ (cf. [Nar, Thm. 4.17, §3, chap IV, p. 184]). Dans ce cas, la Proposition (11.8) s'applique, et donc (en adaptant un petit peu la preuve) on obtient : $\theta(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}})(\pi) = \text{Frob}_{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathfrak{p})^{-1}$. Et on conclut en vertu de la relation (*) de la définition précédente et de la relation (*) du Théorème (9.10). #

Proposition (II.iii)(Réciprocité de Hilbert)

Soit K un corps de nombres contenant une racine n -ième primitive de l'unité, et $a, b \in K^*$. Alors

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n = 1.$$

Preuve

La pertinence de ce produit et la preuve de la proposition est une application directe du Lemme de réciprocité pour les symboles des restes normiques (13.31). #

Théorème (II.iv)

Soit $n \in \mathbb{N}$, K un corps de nombres contenant une racine primitive n -ième de l'unité, \mathfrak{p} une place de K et $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ le complété localisé de K en \mathfrak{p} . Alors l'application $\left(\frac{\cdot, \cdot}{\mathfrak{p}} \right)_n : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \times \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \rightarrow \mu_n$ a les propriétés suivantes ($a, b, a', b' \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$) :

- a) $\left(\frac{aa', b}{\mathfrak{p}} \right)_n = \left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n \cdot \left(\frac{a', b}{\mathfrak{p}} \right)_n$
- b) $\left(\frac{a, bb'}{\mathfrak{p}} \right)_n = \left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n \cdot \left(\frac{a, b'}{\mathfrak{p}} \right)_n$
- c) $\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n = 1 \iff a \in N_{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})^*)$.
- d) $\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n = 1 \forall b \iff a \in (\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*)^n$
- e) $\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n \cdot \left(\frac{b, a}{\mathfrak{p}} \right)_n = 1$
- f) $\left(\frac{a, 1-a}{\mathfrak{p}} \right)_n = 1$ si $a \neq 1$
- g) $\left(\frac{a, -a}{\mathfrak{p}} \right)_n = 1$

Enfin, si $n = 2$, $\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_2 \in \{\pm 1\}$. Donc $\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_2 = \left(\frac{b, a}{\mathfrak{p}} \right)_2$ en vertu de e). Et donc $\left(\frac{\cdot, \cdot}{\mathfrak{p}} \right)_2 : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \times \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \rightarrow \{\pm 1\}$ est une \mathbb{F}_2 -forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Mais on a en plus,

$$\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } ax^2 + by^2 - z^2 = 0 \text{ a une solution non triviale en } (x, y, z) \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^{*3} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve

Les parties a)-d) sont immédiates par définition du symbole de Hilbert. On démontre les parties f) et g) ensemble : soit $\xi \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$ tel que $\xi^n - b \neq 0$. Alors on a $\xi^n - b = \prod_{i=0}^{n-1} (\xi - \zeta^i \sqrt[n]{b})$, pour $\sqrt[n]{b}$ une racine n -ième de b fixée et ζ une racine primitive n -ième de l'unité fixée aussi. Soit d le plus grand diviseur de n pour lequel $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^*$ possède une racine d -ième de b . Alors $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ est une extension de degré $\frac{n}{d} := m$. Les conjugués de $\xi - \zeta^i \sqrt[n]{b}$ sont les $\xi - \zeta^j \sqrt[n]{b}$ avec $j \equiv i \pmod{d}$. En effet, $\sqrt[n]{b} = \sqrt[m]{\sqrt[d]{b}} := \sqrt[m]{c}$ et $x^m - c \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}[x]$ irréductible. Et si $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}})$, $\sigma(\zeta^i \cdot \sqrt[n]{b}) = \zeta^i \cdot \zeta_m^l \cdot \sqrt[m]{c} = \zeta^i \cdot \zeta^{dl} \cdot \sqrt[m]{c} = \zeta^{i+dl} \cdot \sqrt[n]{b}$. Ainsi,

$$\xi^n - b = \prod_{i=0}^{d-1} N_{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\xi - \zeta^i \cdot \sqrt[n]{b}) \in N_{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})^*),$$

Donc, en vertu de la partie c), on a $\left(\frac{\xi^n - b, b}{\mathfrak{p}} \right)_n = 1$ Prenant $\xi = 1, b = 1 - a$, puis $\xi = 0$ et $b = -a$, on obtient f) et g). La partie e) résulte du calcul :

$$\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n \cdot \left(\frac{b, a}{\mathfrak{p}} \right)_n = \left(\frac{a, -a}{\mathfrak{p}} \right)_n \cdot \left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}} \right)_n \cdot \left(\frac{b, a}{\mathfrak{p}} \right)_n \cdot \left(\frac{b, -b}{\mathfrak{p}} \right)_n = \left(\frac{a, -ab}{\mathfrak{p}} \right)_n \cdot \left(\frac{b, -ab}{\mathfrak{p}} \right)_n = \left(\frac{ab, -ab}{\mathfrak{p}} \right)_n = 1$$

Enfin, si $n = 2$, et que $\left(\frac{a,b}{\mathfrak{p}}\right)_2 = 1$, alors, la partie c) nous apprend que a est une norme de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, donc $a = z^2 - by^2$ pour certains $x, y \in \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$. Réciproquement, si, $ax^2 + by^2 - z^2 = 0$ a une solution non triviale (x_1, y_1, z_1) , alors, si $x_1 \neq 0$, alors en divisant par x_1 , on voit que a est une norme de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ et si $y_1 \neq 0$, alors en divisant par y_1 , on voit que b est une norme de $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}(\sqrt[n]{b})/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$, donc à chaque fois $\left(\frac{a,b}{\mathfrak{p}}\right)_2 = 1$. Cela montre le théorème. #

Si $n = 2$ et $K = \mathbb{Q}$, on peut faire des calculs plus explicites pour obtenir les mêmes résultats (cf. [Ser, Chapitre III]).

Glossaire et symboles (dans l'ordre d'apparition)

O_K	l'anneau des entiers d'un corps de nombres K	page 2
U_K	unités de O_K	page 2
$f(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$	degré résiduel de $\mathfrak{P} \mathfrak{p}$	page 2
$e(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$	indice de ramification de $\mathfrak{P} \mathfrak{p}$	page 2
$\text{Gal}(L/K)$	groupe de Galois de L/K	page 2
$N(\mathfrak{a}), N_{L/K}$	normes absolues et relatives	page 3
$Z(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$	groupe de décomposition	page 4
$T(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$	groupe d'inertie	page 4
$\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$	automorphisme de Frobenius	page 4
$\text{Fr}_{L/K}(\mathfrak{p})$	classe de conjugaison des $\text{Frob}(\mathfrak{P}/\mathfrak{p})$	page 4
$v_{\mathfrak{p}}(x), x _{\mathfrak{p}}$	valuation et valeur absolue \mathfrak{p} -adique	page 5
$\mathbb{P}_0(K), \mathbb{P}_{\infty}(K), \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(K),$ $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}(K), \mathbb{P}(K)$	ensembles de places	page 5
$\mathbb{L}_{\mathfrak{P}}, \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$	corps \mathfrak{P} , \mathfrak{p} -adiques	page 5
$O_{\mathfrak{p}} = O_{\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}$ et $O_{(\mathfrak{p})} = O_{\mathfrak{p}} \cap K$	complété localisé et localisé de O_K en \mathfrak{p}	page 5
$\widehat{\mathfrak{p}}$ et $\widetilde{\mathfrak{p}}$	idéaux maximaux de $O_{\mathfrak{p}}$ et $O_{(\mathfrak{p})}$	page 5
\mathfrak{m}	K -module	page 7
$\mathbf{1}$	le K -module unité	page 7
$S(\mathfrak{m}), S_0(\mathfrak{m}), S_{\infty}(\mathfrak{m})$	places divisant \mathfrak{m}	page 7
$K_{\mathfrak{m}}^*$	K étoile \mathfrak{m}	page 7
$x \equiv y \pmod{* \mathfrak{m}}$	congruence étoile	page 7
$I_K, I_K^S, I_K(\mathfrak{m})$	groupes d'idéaux	page 11
$\Phi_{L/K}$	l'application d'Artin	page 11
$\widetilde{S}, \widetilde{\mathfrak{m}}, I_L(\widetilde{\mathfrak{m}})$	extensions à L de S , \mathfrak{m} et $I_K(\mathfrak{m})$	page 12
$P_K, P(\mathfrak{m})$	groupes d'idéaux principaux	page 13
$K^*(\mathfrak{m})$	$\cap_{\mathfrak{p} \in S_0(\mathfrak{m})} O_{(\mathfrak{p})}^*$	page 13
$P_{\mathfrak{m}}$	groupe d'idéaux principaux	page 13
$h_{\mathfrak{m}}$	cardinal $ I(\mathfrak{m})/P_{\mathfrak{m}} $	page 13
$U_{\mathfrak{m}}$	$U_K \cap K_{\mathfrak{m}}^*$	page 13
$j(x, \mathfrak{K})$	idéaux de \mathfrak{K} de norme inf. à x	page 19
v et l	plongements canonique et log.	page 19
l_0 et N_0	applications	page 19
$\partial A, \overset{\circ}{A}, \overline{A}$	bord, intérieur, adhérence de A	page 21
$\Re(z), \Im(z)$	partie réelle et imaginaire de z	page 21
$\zeta(s)$	la fonction zeta de Riemann	page 27
$\zeta_{\mathfrak{m}}(s, \mathfrak{K})$	fonction zeta de \mathfrak{m} et \mathfrak{K}	page 29
$\chi(g) \in \widehat{G}$	caractère d'un groupe abélien G	page 29
$\mathbf{1}$	caractère unité	page 29
$L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$	fonction L pour \mathfrak{m} et χ	page 30

$\zeta_{\mathfrak{m}}(s)$	$= L_{\mathfrak{m}}(s, \mathbf{1})$	page 30
$\text{Log}(z)$	branche principale du logarithme	page 30
$\mathbf{log} L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$	fonction logarithme de $L_{\mathfrak{m}}(s, \chi)$	page 33
$f \sim g$	équivalence de f et g	page 33
$\delta(S)$	densité de Dirichlet de S	page 34
$T(m, n)$	nombre d'éléments de C_m d'ordre multiple de n	page 41
$S(L/K), \tilde{S}(L/K)$	idéaux de K qui se décomposent	page 47
$\Delta, N, \Delta A, N A$	$1 - \sigma$, norme-trace	page 50
$H^0(A), H^1(A)$	groupes de cohomologie	page 50
$q(A)$	quotient de Herbrand	page 53
$f_{\mathfrak{p}}, e_{\mathfrak{p}}$	degrés résiduels, indices de ramification	page 55
$\iota, j_{\mathfrak{m}}, f_{\mathfrak{m}}$	homomorphismes de G -modules	page 56
L^{*S}	les S -unités de L	page 56
$a(\mathfrak{m})$	l'indice $[K^* : N(L^*)K_{\mathfrak{m}}^*]$	page 61
$U_{\mathfrak{p}}, U_{\mathfrak{p}}^{(k)}$	$U_{\mathfrak{p}}$ = les inversibles de $O_{\mathfrak{p}}$, $U_{\mathfrak{p}}^{(k)} = 1 + \widehat{\mathfrak{p}}^k \subset U_{\mathfrak{p}}$	page 63
$\exp(x), \log(x+1)$	définition formelle des fonctions \exp et \log	page 64
$n(\mathfrak{m})$	$[K_{\mathfrak{m}}^* \cap \iota^{-1}(N(I_L(\tilde{\mathfrak{m}}))) : K_{\mathfrak{m}}^* \cap N(L^*)]$	page 72
\mathfrak{m} admissible	\mathfrak{m} est admissible si $P_{\mathfrak{m}} \subset \ker(\Phi_{L/K} I_K(\mathfrak{m}))$	page 77
H sous-groupe de congruence	H est ainsi si $P_{\mathfrak{m}} \subset H \subset I_K(\mathfrak{m})$ pour un \mathfrak{m}	page 85
\mathbb{H}	classe d'équivalence de sous-groupe de congruence	page 87
\mathfrak{f}	conducteur d'une classe \mathbb{H}	page 87
$H(\mathfrak{m}) \subset \mathbb{H}$	groupe de congruence défini pour \mathfrak{m} dans \mathbb{H}	page 87
$\mathbb{H}(L/K)$	classe d'équivalence déf. par les noyaux de $\Phi_{L/K}$	page 88
$\mathfrak{f}(L/K)$	conducteur de la classe $\mathbb{H}(L/K)$ (ou de L/K)	page 88
I_K/\mathbb{H}	$I_K(\mathfrak{m})/H(\mathfrak{m})$ pour n'importe quel $H(\mathfrak{m})$ de \mathbb{H}	page 90
$H_E(\tilde{\mathfrak{m}}) \in \mathbb{H}_E$	classe de E définie par une classe \mathbb{H} de K	page 90
L/K	n -extension de Kummer	page 94
K^{*S}	$\{a \in K^* \mid v_{\mathfrak{p}}(aO_K) \neq 0 \Rightarrow \mathfrak{p} \in S\}$, les S -unités de K	page 96
$I_K[S]$	le sous-groupe de I_K engendré par les $\mathfrak{p} \in S$	page 96
$c(\mathfrak{m})$	$[K^* : K^{*n}K_{\mathfrak{m}}^*]$	page 97
$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n$	symbole de puissance n -ième résiduelle	page 99
$\Phi_{E/K}$	application d'Artin pour E/K non abélienne	page 108
Θ	application de $K_{\mathfrak{m}} \rightarrow \text{Gal}(L/K)$	page 112
$U_{\mathfrak{p}}^{(b)}$	extension de la déf. de $U_{\mathfrak{p}}^{(b)}$ vu p. 63	page 116
$\theta_{\mathfrak{p}}$	symbole de norme résiduelle	page 116
$V_{G \rightarrow H}$	hom. de transfert de G sur H	page 126
I_G	idéal d'augmentation	page 127
$d(g)$	$d(g) := g - 1$	page 127
$ x _{\mathfrak{p}}$	"norme \mathfrak{p} -adique"	page 135
ppt	"pour presque tout"	page 136
$\mathbb{A}_K, \mathbb{I}_K$	adèles et idèles de K	page 136

$\mathbb{A}_K(S)$	$\prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}} \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}$	page 136
$\mathbb{I}_K(S)$	$\prod_{\mathfrak{p} \in S} \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* \times \prod_{\mathfrak{p} \notin S} \mathcal{O}_{\mathfrak{p}}^*$	page 136
K, K^*	adèles et idèles principaux	page 138
C_K	\mathbb{I}_K / K^*	page 138
$ a $	$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} a _{\mathfrak{p}}$ volume d'un idèle	page 138
\mathbb{I}_K^0	noyau de l'application volume, idèles spéciaux	page 141
C_K^0	\mathbb{I}_K^0 / K^*	page 141
$\mathbb{I}_{\mathfrak{m}}$	$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} U_{\mathfrak{p}}^{(m_{\mathfrak{p}})}$, où $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}$	page 143
$\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}$	$\{(a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{I}_K \mid a_{\mathfrak{p}} \in U_{\mathfrak{p}}^{(m_{\mathfrak{p}})} \forall \mathfrak{p} \mid \mathfrak{m}\}$, où $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \mathfrak{p}^{m_{\mathfrak{p}}}$	page 143
$C_{\mathfrak{m}}$	$(\mathbb{I}_{\mathfrak{m}} \cdot K^*) / K^*$	page 143
ψ	$(a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \mapsto \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}_0(K)} \mathfrak{p}^{v_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}})}$	page 145
$\psi_{\mathfrak{m}}$	$\psi _{\mathbb{I}'_{\mathfrak{m}}}$	page 145
$H(\mathfrak{m})$	$\psi(H \cap \mathbb{I}'_{\mathfrak{m}})$ si $I_{\mathfrak{m}} \subset H \subset \mathbb{I}_K$ est un sous-groupe ouvert	page 145
$N_{L/K}$	Extension de la définition de norme de \mathbb{I}_L sur \mathbb{I}_K	page 147
$\mathbb{I}''_L(\mathfrak{m})$	$\{(a_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}} \in \mathbb{I}_L \mid a_{\mathfrak{P}} = 1 \forall \mathfrak{P} \text{ tel que } \mathfrak{P} \nmid \tilde{\mathfrak{m}}\}$	page 149
Υ	$\mathbb{I}_K \rightarrow \text{Gal}(L/K), (a_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}} \mapsto \prod_{\mathfrak{p} \in \mathbb{P}(K)} \theta_{\mathfrak{p}}(a_{\mathfrak{p}})$	page 150
$\theta(\mathbb{L}/\mathbb{K})$	Symbole de norme résiduel pour \mathbb{L}/\mathbb{K}	page 155
\mathcal{O}_f	$\mathbb{Z}[fw_K] = [1, fw_K]$, ordre de d'indice f	page 161
$Q_D(x, y)$	forme quadratique entière liée au discriminant D	page 162
$\left(\frac{a, b}{\mathfrak{p}}\right)_n$	symbole de Hilbert	page 166

Index

adèles	136
anneau de Dedekind	2
anneau des entiers d'un corps de nombres	2
application d'Artin	11
application d'Artin pour des extensions non abéliennes	108
automorphisme de Frobenius	3
branche principale du logarithme	31
caractères	30
classes d'équivalence de sous-groupes de congruences	85
conducteur de L/K	87
conducteur d'un ordre	161
conducteur d'un sous-groupe ouvert	145
conducteur d'une classes d'équivalence de sous-groupes de congruences	87
corps cyclotomiques	2
corps de classe	89
corps de classe d'un ordre	162
corps de classe étendu d'un ordre	162
corps de Hilbert	123
corps de nombres	1
corps local	152
décomposition d'idéaux premiers	48
degré résiduel	2
densité de Dirichlet	33
discriminant d'un corps	21
discriminant d'un corps quadratique	101+161
discriminant d'un ordre	161
discriminant d'un polynôme	46
égalité fondamentale du corps de classe (ext. cycliques)	74
ensemble J -mesurable	22
ensemble régulier	33
entiers indépendants modulo m	79
exponentiel formel	64
extension cyclotomique de corps de nombres	16
extension de Kummer	94
fonction lipschitzienne	22
fonctions zeta	27+29
G -modules	50
groupe de classes radiales	13
groupe de décomposition	4

groupe des classes d'adèles	139
groupe des classes d'idéaux	13
groupe des classes d'idèles	139
groupe d'inertie	4
homomorphisme de transfert	126
idéal d'augmentation	127
idéles	136
idéles spéciaux	141
indice de ramification	2
K -modules	7
K -modules \mathfrak{p} -admissibles	112
K -modules admissibles	77
K -modules admissibles pour un sous-groupe ouvert	145
lemme d'Artin	80
lemme de continuité des racines	153
lemme de Krasner	152
lemme de l'hexagone	51
lemme de naturalité (deuxième)	119
lemme de naturalité (premier)	119
lemme de naturalité (troisième)	121
lemme de translation	111
logarithme formel	64
module de permutation	54
normes, absolues, relatives, d'un idéal	3
ordre sur K	161
partie $(n-1)$ -Lipschitz paramétrisable	22
pavé	22
place (finie, infinie réelle ou complexe)	5
pour presque tout	136
quotient de Herbrand	53 et suiv.
ramification des places infinies	55+57
réduction d'un polynôme modulo p	45
réseau plein	21
série L de Dirichlet	30
série de Dirichlet	26
sous-groupe de congruence	85
sous-groupe de congruence équivalents	85
sous-groupe des classes d'idèles spéciaux	141
sous-groupes des commutateurs	108+1157
S-unités	56
symbole de Hilbert	166

symbole de Legendre	100+164
symbole de puissance n -ième résiduelle	99
symbole de reste normique	116
symbole de reste normique pour les corps locaux	156
théorème $[\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}^* : N_{\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}}(\mathbb{L}_{\mathfrak{p}}^*)] = [\mathbb{L}_{\mathfrak{p}} : \mathbb{K}_{\mathfrak{p}}]$	69+122
théorème $L_{\mathfrak{m}}(1, \chi) \neq 0$	36
théorème $U_{\mathfrak{p}} = N_{\mathfrak{p}}(U_{\mathfrak{P}})$	69+122
théorème 90 de Hilbert	7
théorème chinois	6
théorème d'approximation débile	9
théorème de Čebotarev	39 et suiv.
théorème de Bauer	49
théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques	40
théorème de Dirichlet-Chevalley-Hasse	96
théorème de Kronecker-Weber	84
théorème de la norme de Hasse	75
théorème de la première inégalité du corps de classe	38
théorème de l'admissibilité du conducteur	123
théorème de l'existence du corps de Hilbert	123
théorème de l'idéal principal de la théorie des groupes	127
théorème de présentation des corps locaux	152
théorème de présentation d'un nombre premier par une forme quadratique	163+164
théorème de réciprocité d'Artin	83
théorème de réciprocité de Hilbert	167
théorème de réciprocité pour le symbole des restes normiques	151
théorème de réciprocité quadratique	101
théorème de surjectivité de l'application d'Artin	35
théorème des idéaux principaux de la théorie du corps de classe	133
théorème des normes d'une extension de Kummer locale	156
théorème des unités de Dirichlet	7
théorème d'existence du corps de classe	89+103
théorème d'existence du corps de classe (version idélique)	147+150
théorème d'existence du corps de classe local	159
théorèmes de Galois	3
théorèmes d'isomorphismes,	1
transversale de H dans G	125
uniformisante	63
valeur absolue (archimédienne, non archimédienne)	5
valuation \mathfrak{p} -adique	63
volume d'un idèle	141

Bibliographie

- [Apo] : T. APOSTOL, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, 1974
- [Con] : J. B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable*, Springer, 1973
- [Cox] : D. A. COX, *Primes of the form $x^2 + ny^2$* , Wiley interscience, 1997
- [Fr-Tay] : A. FRÖHLICH & TAYLOR, *Algebraic number theory*, Cambridge studies in advanced mathematics 27, 1991
- [Has] : H. HASSE, *Beweis eines Satzes und Widerlegung einer Vermutung über des allgemeine Normenrestsymbol*, Nachrichten der Gesellschaft den Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Kl.HI (1931) 64-69
- [Jac1] : N. JACOBSON, *Basic Algebra 1*, Second Edition. New York, W.H. Freeman, 1989.
- [Jac2] : N. JACOBSON, *Basic Algebra 2*, Second Edition. New York, W.H. Freeman, 1989.
- [Jan] : G.J. JANUSZ, *Algebraic Number Fields*, Second Edition, AMS, 1996.
- [La1] : S. LANG, *Algèbre*, troisième édition, Dunod, 2004.
- [La2] : S. LANG, *Algebraic Number Theory*, Second Edition, 1994
- [Mar] : D. MARCUS, *Number Fields*, Springer, 1977.
- [Nar] : W. NARKIEWICZ, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Springer, 1990.
- [Neu] : J. NEUKIRCH, *Algebraic Number Theory*, Springer, 1999
- [Ru] : W. RUDIN, *Principles of Mathematical Analysis*, International Series in Pure & Applied Mathematics, McGraw-Hill, 1964.
- [Sam] : P. SAMUEL, *Théorie algébrique des nombres*, Hermann, 1971.
- [Ser] : J.-P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, Collection SUP No.2, Presses Universitaires de France, Paris 1970.